# منطق ریاضی

## چند تعریف

ـ **ترکیب عطفی:** ترکیب عطفی هر دو گزاره دلخواه $q$ , $p$ با $p \wedge q$ نشان داده می‌شود.

ـ **ترکیب فصلی:** این ترکیب را با $p \vee q$ نشان داده و خوانده می‌شود "$p$ یا $q$" .

ـ **استلزام:** "$p$ مستلزم $q$ است" و این استلزام را با $p \to q$ نمایش می‌دهیم.

ـ ترکیب دو شرطی : این ترکیب را با $p \leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم و این گونه می‌خوانیم "$p$ اگر و فقط اگر $q$".

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \underline{\vee} q$ | $p \to q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

ـ گزاره مرکب را یک راستگو نامند هرگاه به ازای همه ارزش‌های راستی که به گزاره‌های مولفه‌ای آن نسبت داده می‌شود، راست باشد، اگر گزاره‌ای مرکب، به ازای همهٔ چنین نسبت دادنهایی، دروغ باشد آن را یک تناقض می‌نامند.

✓ **نکته:** $p \to q$ را به صورت $\neg p \vee q$ نیز می‌توان نمایش داد.

ـ دو گزاره $s_2$ , $s_1$ به طور منطقی هنگامی هم ارزند که هرگاه $s_1$ راست (یا دروغ) باشد اگر فقط اگر $s_2$ راست (یا دروغ باشد) و به صورت $s_1 \leftrightarrow s_2$ نمایش می‌دهیم. (به بیان ساده‌تر باید هم ارزش باشند).

## قانون‌های منطق

۱) $\neg\neg p \leftrightarrow p$

۲) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

۳) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$

۴) $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
$p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

۵) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

یادداشت:

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

۶) $p \vee p \leftrightarrow p$
$p \wedge p \leftrightarrow p$

۷) $p \vee F_{\bullet} \leftrightarrow p$
$p \wedge T_{\bullet} \leftrightarrow p$

۸) $p \vee \neg p \leftrightarrow T_{\bullet}$
$p \wedge \neg p \leftrightarrow F_{\bullet}$

۹) $p \vee T_{\bullet} \leftrightarrow T_{\bullet}$
$p \wedge F_{\bullet} \leftrightarrow F_{\bullet}$

۱۰) $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$

ـ **تعریف استلزام منطقی:** گزاره شرطی همواره درست $p \rightarrow q$ را استلزام منطقی نامیده و می‌خوانیم ″p نتیجه می‌دهد q″ و با نماد $p \Rightarrow q$ نمایش می‌دهیم در این صورت p را یک شرط کافی برای q می‌خوانیم و q را یک شرط لازم برای p می‌نامیم.

ـ **تعریف دوگان :** هرگاه $t(p_1, p_2, \ldots p_n)$ یک گزاره مرکب باشد که فقط شامل اپراتورهای $\wedge, \vee, \neg$ باشد، آنگاه دوگان گزاره t را با $t^*$ نمایش داده و گزاره‌ای است که از تبدیل $\wedge$ به $\vee$ و $\vee$ به $\wedge$ و T به F و F به T به دست آمده باشد.

– **تابع ارزش:** می‌توان به هر گزاره یک ارزش نسبت داد، بنابراین برای هر گزاره درست، ارزش یک و به نادرست صفر را نسبت می‌دهیم در این صورت:

$$V(T) = 1$$
$$V(F) = 0$$
$$V(p \wedge q) = V(p).V(q) = \min\{V(p), V(q)\}$$
$$V(p \vee q) = V(p) + V(q) = \max\{V(p), V(q)\}$$
$$V(p \vee q) = V(\neg(\neg(p \vee q))) = 1 - V(\neg p \wedge \neg q) = 1 - V(\neg p).V(\neg q) =$$
$$1 - (1 - V(p))(1 - V(q))$$
$$= 1 - (1 - V(p)) - V(q) + V(p)V(q) = V(p) + V(q) - V(p)V(q)$$
$$V(p \rightarrow q) = V(\neg p \vee q) = V(\neg p) + V(q) - V(\neg p)V(q)$$
$$= 1 - V(p) + V(q) - (1 - V(p))V(q)$$
$$= 1 - V(p) + V(q) - V(q) + V(p)V(q)$$
$$= 1 - V(p) + V(p)V(q)$$

**یادداشت:**

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

..........................................................................................................................................

$$V(p\oplus q)=V(\neg(p\leftrightarrow q))=1-V((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$$
$$=1-V(p\rightarrow q)V(q\rightarrow p)=1-V(\neg p\vee q)$$

## ـ استنتاج منطقی

استنتاج منطقی بررسی درستی یک گزاره شرطی است با استفاده از مجموعه‌ای از مفروضات که براساس یک سری قوانین مشخص صورت می‌گیرد، البته هر یک از قوانین خود یک استلزام منطقی هستند.

✓ **نکته:** منظور از

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \underline{p_n} \\ \therefore q \end{array} \Rightarrow p_1\wedge p_2\wedge p_3\ldots\wedge p_n\mapsto q$$

اگر این گزاره شرطی همواره درست باشد گوییم استنتاج مذکور معتبر است.

**مثال: نقیض p درست است، پس خود p نادرست است .**

$p\vee q$ درست است پس q درست است.

$$\begin{array}{l} p\vee q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore q \end{array}$$

**تعریف سور : کمیتی است که برای نسبت دادن مقادیر یک مجموعه به یک گزاره نما به کار می‌رود، منظور از گزاره نما جملهٔ خبری است که ارزش آن وابسته به یک یا چند متغیر است به طور کلی سورها به شکل زیر دسته بندی می‌شوند.**

۱)سور عمومی '$\forall$' که می‌خوانیم «به ازای کلیه مقادیر، برای هر»

۲) سور وجودی $\exists$ که می‌خوانیم «حداقل به ازای یک مقدار، وجود دارد»

۳) سور یکتا $\exists!$ که می‌خوانیم «فقط یک عضو وجود دارد»

۴) سور صفر $\nexists$ که می‌خوانیم «برای هیچ مقدار وجود ندارد»

✓ **نکته:** گزاره $\forall x[p(x)\rightarrow(r(x)\vee q(x))]$ را در نظر بگیرید در این صورت

عکس نقیض آن معادل با $\forall x[\neg(r(x)\vee q(x))\rightarrow\neg p(x)]$

عکس آن معادل با $\forall x[(r(x)\vee q(x))\rightarrow p(x)]$

و وارون آن معادل با $\forall x[\neg p(x)\rightarrow\neg(r(x)\vee q(x))]$

**یادداشت:**

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

✓ **چند نکته:** به ازای یک عالم مشخص و هر دو گزاره باز دلخواه $q(x)$ , $p(x)$ بر حسب متغیر $x$ :

$$\exists x[p(x)\wedge q(x)] \Rightarrow [\exists xp(x)\wedge \exists xq(x)]$$

$$\exists x[p(x)\vee q(x)] \Leftrightarrow [\exists xp(x)\vee \exists x q(x)]$$

$$\forall x[p(x)\wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall xp(x)\wedge \forall x q(x)]$$

$$[\forall xp(x)\vee \forall xq(x)] \Rightarrow \forall x[p(x)\vee q(x)]$$

✓ **نکته**: قاعده‌هایی برابر به دست آوردن نقیض گزاره‌های حاوی یک سور

$$\neg[\forall xp(x)] \Leftrightarrow \exists x\neg p(x)$$

$$\neg[\exists xp(x)] \Leftrightarrow \forall x\neg p(x)$$

$$\neg[\forall x\neg p(x)] \Leftrightarrow \exists x\neg\neg p(x) \Leftrightarrow \exists xp(x)$$

$$\neg[\exists x\neg p(x)] \Leftrightarrow \forall x\neg\neg p(x) \Leftrightarrow \forall xp(x)$$

❖ توجه کنید که :

$$\exists xp(x)\wedge \exists x q(x) \not\Rightarrow \exists x[p(x)\wedge q(x)]$$

$$\forall x[p(x)\vee q(x)] \not\Rightarrow \forall xp(x)\vee \forall xq(x)$$

$$\forall x\exists y p(x,y) \not\Leftarrow \exists y\forall x p(x,y)$$

**تست: می‌خواهیم نشان دهیم استدلال زیر در منطق گزاره‌ها معتبر نیست.**

$$\{(p\wedge q)\vee r\ ,\ q\rightarrow(r\vee s)\ ,\ \sim p\rightarrow q\}\vdash p\vee s$$

**کدام ارزش دهی به گزاره‌های پایه $(p,q,r,s)$ این نامعتبر بودن را نشان می‌دهد؟**

**(T همان ارزش True و F همان False است)**

۱) $(F,T,T,T)$ ۲) $(T,T,F,T)$ ۳) $(F,T,T,F)$ ۴) $(F,T,F,F)$

**حل:** گزینه ۳ صحیح است.

با نسبت دادن مقادیر $(F,T,T,F)$ به $(p,q,r,s)$ خواهیم داشت:

$$(p\wedge q)\vee r\equiv(F\wedge T)\vee T\equiv T$$

$$q\rightarrow(r\vee s)\equiv T\rightarrow(T\vee F)\equiv T\rightarrow T\equiv T$$

$$\sim p\rightarrow q\equiv\sim F\rightarrow T\equiv T\rightarrow T\equiv T$$

$$p\vee s\equiv F\vee F\equiv F$$

**یادداشت:**

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

# مبانی شمارش

## ـ اصل جمع

فرض کنید A و B دو پیشامد مجزا باشند (هم زمان رخ ندهند) اگر A به m طریق و B به n طریق رخ دهد در این صورت A یا B به m+n طریق رخ خواهد داد.

## ـ اصل ضرب

فرض کنید پیشامد C به دو مرحله A و B قابل تجزیه باشد. اگر A به m طریق و B صرف نظر از رخدادهای A به n طریق رخ دهد در این صورت پیشامد C به mn طریق رخ خواهد داد، به پیشامدهای A و B اصطلاحاً پیشامدهای مستقل گویند.

## ـ جایگشت

در صورتی که A مجموعه n عضوی $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ باشد و $0 \le r \le n$ تعداد r جایگشت‌های A را به صورت $P(n,r)$ نمایش می‌دهند.

ـ تعداد r جایگشت‌های n شی متمایز برابر است با $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

ـ تعداد r جایگشت های مکرر n شی متمایز برابر بر $n^r$ است.

## ـ مبانی شمارش

تعداد طرق انتخاب K شی از بین n شی متمایز برابر با $\binom{n+K-1}{n}$ می‌باشد.

اگر n شی چنان باشند که $K_1$ شی از آن‌ها با هم و $K_2$ شی دیگر با هم ... و بالاخره $K_m$ شی دیگر نیز با هم مشابه باشند $K_1+K_2+...+K_m=n$ آنگاه تعداد جایگشت‌های آن n شی برابر با $\frac{n!}{K_1!\,K_2!\,...K_m!}$ خواهد شد.

**تست: با ارقام 2,2,2,1,1 چند عدد پنج رقمی می‌توان ساخت؟**

۱) 5 ۲) 10 ۳) 20 ۴) 24

حل: گزینه ۲ صحیح است.

$$\frac{5!}{3!\times 2!}=10$$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

- ✓ **نکته**: تعداد جایگشت های $n-1$ شی از n شی با تعداد جایگشت‌های n شی از n شی برابر است.
- ✓ **نکته**: تعداد جایگشت‌های n شی متمایز در اطراف یک دایره به طوری که جهت دور اهمیت داشته باشد برابر $(n-1)!$ و تعداد جایگشت‌ها وقتی که جهت دور اهمیت نداشته باشد $\frac{(n-1)!}{2}$ می‌باشد.

**ترکیب:** تعداد طرق انتخاب r شی از n شی متمایز به طوری که جابجایی در r شی منتخب حالت جدیدی ایجاد نکند را ترکیب r از n نامیده و آن را به یکی از صورت‌های $\binom{n}{r}, C(n,r)$ و یا $C_n^r$ نمایش می‌دهند.

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}$$

$$\binom{r}{n}=\frac{n!}{(n-1)!r!}$$

## چند خاصیت مهم برای ترکیب :

۱) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

۲) $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

۳) $\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}$

۴) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

۵) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

۶) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots(-1)^n\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

۷) $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$

۸) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots \quad n\geq 0$

**یادداشت**:

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

۹) $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k y^{n-k}$

۱۰) $\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$

✓ **نکته** : تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله سیاله $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k=n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است.

✓ **نکته** : تعداد جواب‌های صحیح و نامفی معادله سیاله برابر با $\binom{n+k-1}{n}$ یا $\binom{n+k-1}{k-1}$ است.

**تست: تعداد جواب‌های طبیعی نامعادله $x_1+x_2+\ldots+x_6<15$ کدام است؟**

۱) $\binom{14}{7}$ ۲) $\binom{20}{5}$ ۳) $\binom{14}{6}$ ۴) $\binom{20}{6}$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=15$$
$$\binom{15-1}{7-1}=\binom{14}{6}$$

**تست: به ازای عدد صحیح و مثبت n تعداد چهارتایی‌های $(a,b,c,d)$ از اعداد صحیح را بیابید به طوری که $0\le a\le b\le c\le d\le n$ باشد.**

۱) $\binom{n}{4}$ ۲) $4\binom{n}{4}$ ۳) $\binom{n+4}{4}$ ۴) $2\binom{n+1}{4}$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$x_1=n-d\ge 0$$
$$x_2=d-c\ge 0$$
$$x_3=c-b\ge 0$$
$$x_4=b-a\ge 0$$
$$x_5=a\ge 0$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=n$$
$$\binom{n+5-1}{n}=\binom{n+4}{n}=\binom{n+4}{4}$$

**یادداشت:**

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**تست: تعداد زیرمجموعه های 5 عضوی مجموعه $A=\{1,2,...,30\}$ که در آن‌ها هیچ دو عضوی با اختلاف کمتر از 3 وجود ندارد برابر با کدام است؟**

۱) $\binom{27}{5}$ ۲) $\binom{22}{5}$ ۳) $\binom{27}{15}$ ۴) $\binom{22}{15}$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

$$1 \le x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 \le 30$$

$$X_1 = x_1 - 1 \ge 0$$

$$X_2 = x_2 - x_1 \ge 3$$

$$X_3 = x_3 - x_2 \ge 3$$

$$X_4 = x_4 - x_3 \ge 3$$

$$X_5 = x_5 - x_4 \ge 3$$

$$\underline{X_6 = x_6 - x_5 \ge 0}$$

$$\underset{\ge 0}{x_1} + \underset{\ge 3}{x_2} + \underset{\ge 3}{x_3} + \underset{\ge 3}{x_4} + \underset{\ge 3}{x_5} + \underset{\ge 0}{x_6} = 29$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 17$$

$$\binom{17+6-1}{6-1} = \binom{22}{5}$$

## ـ قضیه دو جمله‌ای

اگر y , x دو متغیر و n عدد صحیح مثبتی باشد آنگاه

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}xy^{n-1} + \binom{n}{2}x^2y^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1}x^{n-1}y + \binom{n}{n}x^ny^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

✓ **نکته:** به ازای هر عدد صحیح $n > 0$

۱) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$$

۲) $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

**یادداشت:**

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

✓ **نکته:** به ازای اعداد صحیح مثبت $t, n$ ضریب $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \ldots x_t^{n_t}$ در بسط $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_t)^n$ برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \ldots n_t!}$$

که در آن به ازای هر $1 < i < t$ , $n_i$ عددی صحیح است به طوری که $0 \le n_i \le n$ , $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_t = n$ .

**مثال: ضریب $x^2y^2z^3$ در بسط $(x+y+z)^7$ برابر با چند است؟**

**حل:**

$$\binom{7}{2,2,3} = \frac{7!}{2!2!3!}$$

**مثال: تعداد جملات $(x+y+z)^{10}(w+x+y+z)^2$ برابر با چند است؟**

$$(x+y+z)^{10}\left[(x+y+z)^2 + 2w(x+y+z) + w^2\right]$$

$$=(x+y+z)^{12} + 2w(x+y+z)^{11} + w^2(x+y+z)^{10}$$

$$=\binom{12+3-1}{3-1} + \binom{11+3-1}{3-1} + \binom{10+3-1}{3-1}$$

**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

## تعریف عاد کردن

اگر $a,b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$ گوییم b عدد a را عاد می‌کند و آن را به صورت $a \mid b$ می‌نویسیم.

✓ **نکته:** به ازای هر $a,b,c \in \mathbb{Z}$

۱ـ $0 \mid a \ , \ 1 \mid a$

۲ـ $\left[(a \mid b) \wedge (b \mid a)\right] \Rightarrow a = \pm b$

۳ـ $\left[(a \mid b) \wedge (b \mid c)\right] \Rightarrow a \mid c$

۴ـ به ازای هر $x \in \mathbb{Z}$ ، $a \mid b \Rightarrow a \mid bx$

۵ـ به ازای $x,y,z \in \mathbb{Z} \ , \ x = y + z$ و اگر a دو عدد از سه عدد صحیح $z,y,x$ را عاد کند آنگاه a عدد صحیح سوم را نیز عاد می‌کند.

۶ـ به ازای $x,y \in \mathbb{Z}$ ، $\left[(a \mid b) \wedge (a \mid c)\right] \Rightarrow a \mid (bx + cy)$

۷ـ به ازای هر $1 \le i \le n$ فرض کنیم $c_i \in \mathbb{Z}$ اگر a هر $c_i$ را عاد کند آنگاه به ازای هر $x_i \in \mathbb{Z} \ , \ 1 \le i \le n$
$a \mid (c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n)$

## همنهشتی

**تعریف:** فرض کنید که m عددی طبیعی و b , a دو عدد صحیح باشند. b , a را به پیمانه m همنهشت گوییم هرگاه $m \mid a - b$ که به صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ نمایش می‌دهیم.

✓ **نکته:** اگر m عددی طبیعی باشد، دو عدد صحیح به پیمانه m همنهشتند اگر و فقط اگر باقیمانده تقسیم آنها بر m یکسان باشد. در نتیجه باقیماندهٔ تقسیم عددی صحیح بر m برابر با کوچکترین عدد صحیح و نامنفی است که به پیمانه m با عدد مورد نظر همنهشت است.

✓ **نکته:** دستهٔ هم ارزی $[a]$ در رابطه همنهشتی به پیمانه m مجموعهٔ همه اعداد صحیحی است که باقیماندهٔ تقسیم آن‌ها بر m برابر با a است و $a \in [a]$ .

**یادداشت:**

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

## خواص همنهشتی

اگر $d,c,b,a$ اعدادی صحیح و m عددی طبیعی و بزرگتر از 1 باشد، آنگاه :

۱) $mk \overset{m}{\equiv} 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$

۲) $a \overset{m}{\equiv} a$

۳) $\left(a \overset{m}{\equiv} b\right) \Rightarrow \left(b \overset{m}{\equiv} a\right)$

۴) $\left(a \overset{m}{\equiv} b \,,\, b \overset{m}{\equiv} c\right) \Rightarrow \left(a \overset{m}{\equiv} c\right)$

۵) $\left(a \overset{m}{\equiv} b \,,\, c \overset{m}{\equiv} d\right) \Rightarrow \left(a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm d\right)$

۶) $\left(a \overset{m}{\equiv} b, c \overset{m}{\equiv} d\right) \Rightarrow \left(ac \overset{m}{\equiv} bd\right)$

۷) $\left(a \overset{m}{\equiv} b\right) \Rightarrow \left(a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c \,,\, ac \overset{m}{\equiv} bc\right)$

۸) $\left(a \overset{m}{\equiv} b\right) \Rightarrow \left(a^n \overset{m}{\equiv} b^n\right) \quad n \in \mathbb{Z}$

۹) $\left(a \overset{m}{\equiv} b\right) \Rightarrow a \pm mk \overset{m}{\equiv} b \quad k \in \mathbb{Z}$

۱۰) $\left(a \overset{m}{\equiv} b \,,\, a \overset{n}{\equiv} b\right) \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$

۱۱) $\left(a \overset{m}{\equiv} b \,,\, m' | m\right) \Rightarrow a \overset{m'}{\equiv} b$

۱۲) $\left(ac \overset{m}{\equiv} bc \,,\, m' = \dfrac{m}{(c,m)}\right) \Rightarrow a \overset{m'}{\equiv} b$

۱۳) $ac \overset{m}{\equiv} bc \,,\, n = (m,c) \Rightarrow a \overset{\frac{m}{n}}{\equiv} b$

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

✓ **نکته بسیار مهم**: تقسیم دو طرف همنهشتی بر عددی غیر صفر همواره مجاز نیست. یعنی اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ <u>ممکن است</u> همنهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$ درست باشد.

**تست: کدام یک از اعداد زیر جواب معادل همنهشتی $4x \overset{15}{\equiv} 3$ می‌باشد؟**

۱) 1380      ۲) 1382

۳) 1389      ۴) 1392

حل: گزینه ۴ صحیح است.

$$4x \overset{15}{\equiv} 3 \ \Rightarrow\ 4x \overset{15}{\equiv} 18 \ \Rightarrow\ 2x \overset{15}{\equiv} 9 \ \Rightarrow\ 2x \overset{15}{\equiv} 9+15=24 \ \Rightarrow\ x \overset{15}{\equiv} 12$$

در بین گزینه‌ها فقط عدد1392 در تقسیم بر 15 باقیمانده 12 می‌آورد.

✓ **نکته** : اگر مجموعه $A=\{a_0\ ,a_1,...,a_{m-1}\}$ به پیمانهٔ m یک دسته کامل مانده‌ها بوده و اعداد صحیح b , a چنان باشند که $(x,m)=1$ در این صورت $B=\{xa_0+b, xa_1+b..., xa_{m-1}+b\}$ نیز یک دسته کامل مانده‌ها به پیمانه m خواهد بود.

✓ **نکته:** اگر p عددی اول باشد و عدد صحیح a چنان باشد که $(a,p)=1$ آنگاه:

$$a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$$

✓ **نکته:**: اگر p عددی اول باشد و a عدد صحیح دلخواه آنگاه:

$$a^{p} \overset{p}{\equiv} a$$

✓ **نکته:**: اگر m عدد طبیعی باشد و $\varphi(m)$ نمایش دهنده تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از m باشد که نسبت به m اول هستند و a عدد صحیحی باشد که $(a,m)=1$ آنگاه :

$$a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$$

**تست: اگر پنجم اسفند سالی سه شنبه باشد اول تیر همان سال چه روزی بوده است؟**

۱)یکشنبه      ۲) دوشنبه      ۳) سه شنبه      ۴) چهارشنبه

حل: گزینه ۱ صحیح است.

اول تیر $3\times31+1$ یعنی 94 امین روز سال. پنجم اسفند $6\times31+5\times30+5$ یعنی 341 امین روز سال. اختلاف دو روز اشاره شده برابر $341-94$ یعنی 247 می‌باشد که در تقسیم بر 7 باقیمانده 2 دارد یعنی تاریخ آینده از تاریخ گذشته 2 روز جلوتر است (به تعبیر دیگر تاریخ گذشته از تاریخ آینده دو روز عقب‌تر است) و چون تاریخ آینده سه شنبه بوده است بنابراین تاریخ گذشته 2 روز عقب‌تر یعنی یکشنبه بوده است.

**یادداشت:**

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

**تست: باقیمانده تقسیم عدد $3^{89}$ بر عدد $7$ چه عددی است؟ (سراسری ۸۸)**

۱) $2$ ۲) $3$ ۳) $4$ ۴) $5$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

بر طبق قضیه فرما $3^{7-1}\overset{7}{\equiv}1$ در نتیجه

$$\left(3^6\right)^{15}\overset{7}{\equiv}1 \;\Rightarrow\; 3^{90}\overset{7}{\equiv}1\overset{7}{\equiv}-6 \;\Rightarrow\; 3^{89}\overset{7}{\equiv}-2\overset{7}{\equiv}5$$

**تست: اگر ساعت $4$ بعدازظهر روز چهارشنبه باشند بعد از گذشت $47^{74}$ ساعت، چه روز و چه ساعتی خواهد بـود؟ (سراسری ۸۹)**

۱)یکشنبه ساعت 3 بعدازظهر ۲) شنبه ساعت 5 بعدازظهر

۳) شنبه ساعت 3 بعدازظهر ۴) یکشنبه ساعت 5 بعدازظهر

**حل:** برای به دست آوردن جواب، ابتدا باید باقیمانده $47^{74}$ را بر $7\times 24=168$ یعنی تعداد ساعات در یک هفته را به دست می‌آوریم.

$$47^{74}=47^{64+8+2}=47^{64}\times 47^{8}\times 47^{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}
47^2=2209\overset{168}{\equiv}25\\
\left(47^2\right)^2\overset{168}{\equiv}(25)^2\overset{168}{\equiv}121\\
\left(47^4\right)^2\overset{168}{\equiv}(121)^2\overset{168}{\equiv}25\\
\left(47^8\right)^2\overset{168}{\equiv}(25)^2\equiv 121\\
\left(47^{16}\right)^2\overset{168}{\equiv}(121)^2\overset{168}{\equiv}25\\
\left(47^{32}\right)^2\overset{168}{\equiv}(25)^2\overset{168}{\equiv}121
\end{array}\right\}\Rightarrow
\begin{array}{l}
47^{74}=47^{64}\times 47^{8}\times 47^{2}\\
\overset{168}{\equiv}121\times 25\times 25\overset{168}{\equiv}25
\end{array}$$

بنابراین $47^{74}$ معادل چند هفته به علاوه 25 ساعت است که یعنی یک روز و یک ساعت بعد از چهارشنبه ساعت 4 بعدازظهر یعنی پنج‌شنبه ساعت 5 بعدازظهر که در گزینه‌ها وجود ندارد.

***** این سئوال در آزمون سراسری ۸۹ حذف گردید.**

**یادداشت:**

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

# روابط بازگشتی

در این قسمت ابتدا به چند مسئله کلاسیک که جواب آن‌ها به سادگی با استفاده از روابط بازگشتی به دست می‌آید می‌پردازیم.

**ـ برج هانوی:** این مسئله به این صورت مطرح می‌شود که ما یک تخته به همراه سه میله عمودی و n دیسک با قطرهای متمایز داریم که دیسک‌ها به ترتیب طول قطرشان روی یک میله قرار دارند. می‌خواهیم حداقل تعداد حرکات برای انتقال این دیسک‌ها را از یک میله به میله دیگر، به شرط آن که روی هیچ میله‌ای دیسکی روی دیسک دیگر با قطر کمتر قرار نگیرد را محاسبه کنیم.

رابطه بازگشتی آن برابر با: $h_n = 2h_{n-1} + 1$

برای محاسبه تعداد حرکات در کل هم کافی است از فرمول $h_k = 2^k - 1$ استفاده کنیم.

**ـ هانوی مضاعف:** یک برج هانوی با 2n دیسک در اختیار داریم که دو به دو قطر دیسک‌های آن با هم برابرند (یعنی دو دیسک با قطر $r_1$ ، دو دیسک با قطر $r_2$ ...) با در نظر گرفتن محدودیت‌های مسئله قبل، با حداقل چند حرکت می‌توان کلیهٔ دیسک‌ها را از مبداء به میلهٔ مقصد انتقال داد.

$$h_{2n} = 2h_{2n-2} + 2$$

**ـ اعداد فیبوناچی** : فرض کنید در ابتدای یک ماه یک جفت خرگوش نوزاد داریم، هر جفت خرگوش نوزاد می‌توانند سپس از دو ماه بالغ شوند و هر ماه یک جفت خرگوش (یک نر و یک ماده) تولید کنند. اگر در ابتدای ماه اول یک جفت خرگوش داشته باشیم در ابتدای ماه n ام چند جفت خرگوش خواهیم داشت؟

رابطه بازگشتی این مسئله به صورت زیر است:

$$f_n = \text{تعداد جفت خرگوشها در ابتدای ماه nام} = \left(\underbrace{f_{n-1} - f_{n-2}}_{\text{بچه خرگوشهای یک ماهه}}\right) + \underbrace{f_{n-2}}_{\text{خرگوشهای بالغ}} + \underbrace{f_{n-2}}_{\text{خرگوشهای نوزاد}} = f_{n-1} + f_{n-2}$$

**توضیح:** در ابتدای ماه چهارم یک جفت خرگوش اولیه یک جفت تولید می‌کند ولی بچه‌های آن‌ها ماه بعدی یعنی در ابتدای ماه پنجم تولید مثل خواهند کرد. بنابراین اگر در ماه $n-1$ به تعداد $f_{n-1}$ خرگوش و در ماه $n-2$ به تعداد $f_{n-2}$ جفت خرگوش داشته باشیم در ماه n ام به تعداد $f_{n-1} + f_{n-2}$ خرگوش خواهیم داشت، زیرا در ابتدای ماه $(n-1)$ ام از $f_{n-1}$ جفت خرگوش موجود $f_{n-1} - f_{n-2}$ خرگوش نوزاد و بقیه خرگوش‌هایی هستند که در ماه n ام تولید مثل خواهند کرد.

سری فیبوناچی: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

رابطه بازگشتی دنباله فیبوناچی به صورت زیر است.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3$$
$$f(1) = 1 \quad f(2) = 1$$

**- مسئله دومینو (کاشی)**

فرض کنید یک مستطیل $2\times n$ داریم که $n\in\mathbb{Z}$ است. می‌خواهیم این مستطیل را با مقواهایی مستطیل شکل به ابعاد $2\times1$ ، به نام دومینو (کاشی) بپوشانیم. به چند طریق مستطیل $2\times n$ با دومینوها کاملاً پوشانده می‌شوند (دومینوها (کاشی‌ها) نباید روی هم قرار گیرند).

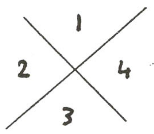
$$d_n = d_{n-1} + d_{n-2} \quad n \geq 3$$

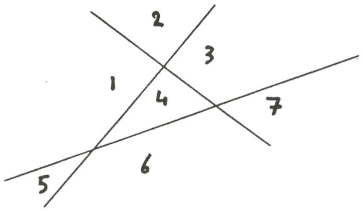
و با توجه به این که رابطه بازگشتی $\{d_n\},\{f_n\}$ یکسان هستند ( $f_n$ رابطه بازگشتی سری فیبوناچی) پس داریم:

$$d_n = f_{n+1}$$

**- مسئله (خطوط در صفحه)**

می‌خواهیم حداکثر نواحی ایجاد شده با رسم n خط راست را در صفحه به دست آوریم رابطه بازگشتی $I_n$ به این صورت نوشته می‌شود.


رابطه بازگشتی $l_n = l_{n-1} + n \quad n \geq 2$

برای محاسبه تعداد نواحی ایجاد شده توسط n خط راست می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده نمود.

$$ln = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

**- مسئله زاویه‌ها**

اگر n زاویه در صفحه رسم شده باشند و $Z_n$ تعداد ناحیه‌های ایجاد شده توسط این n زاویه باشد در این صورت:

$$Z_n = l_{2n} - 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} + 1 - 2n = 2n^2 - n + 1$$

**یادداشت:**

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

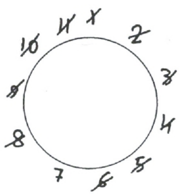
............................................................................................................

### - مسئله ژوزف

در زمان جنگ یهودیان و کاتولیک‌های رومی ژوزف به همراه 41 نفر یهودی توسط رومی‌ها در غاری به تله افتاده بودند. آن‌ها به جای اسیر شدن توسط رومی‌ها ترجیح دادند خودکشی کنند برای انجام این کار آن‌ها دایره‌ای تشکیل دادند و قرار شد به یک نفر خنجری بدهند و هر نفر، بغل دستی خود را بکشد و خنجر رابه نفر بعدی بدهد و همین کار را تا انتها انجام بدهند. ژوزف که نمی‌خواست کشته شود به سرعت به محاسبهٔ مکانی پرداخت که کشته نشود و جان سالم بدر ببرد.

رابطه بازگشتی مسئله ژوزف به صورت زیر است:

$$\begin{cases} J(1)=1 \\ J(2n)=2J(n)-1 & n\ge 1 \\ J(2n+1)=2J(n)+1 & n\ge 1 \end{cases}$$

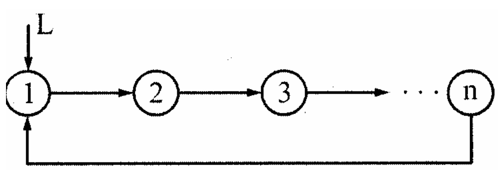


✓ نکته: برای محاسبه ساده تر رابطهٔ بازگشتی ژوزف می‌توان از فرمول زیر استفاده نمود.

$$J(n)=2\left(n-2^{\lfloor \lg n \rfloor}\right)+1$$

**تست: با توجه به تابع روبرو لیست حلقوی مذکور به ازای مقادیر n برابر 729 و 2200 مقدار خروجی به ترتیب برابر چند خواهد بود؟ (مهندسی کامپیوتر_ سراسری ۱۳۸۹)**

```
int SO(LIST*L){
While(L→next !=L){
L → next=L → next → next
L=L  →  next;
 }
return L → data;
 }
```




۱) 40,1

۲) 1,1

۳) 2200,729

۴) هیچ کدام

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

گزینه ۴ صحیح است.

$$J(729)=2(729-512)+1=435$$

$$J(2200)=2(2200-2048)+1=305$$

❖ لازم به ذکر می‌باشد که مرتبه زمانی رابطه بازگشتی ژوزف از مرتبه $O(n\lg n)$ می‌باشد.

**- مسئله پله (نردبان)**

شخصی می‌خواهد از n پلکان بالا رود. این شخص پله‌ها را یکی یکی یا دو تا یکی می‌تواند بالا رود. این فرد به چند طریق می‌تواند مسیر را طی کند.

**رابطه بازگشتی**: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

$a_1=1 \quad a_2=2$

**تست: تمام اعداد n رقمی را در نظر بگیرید که هر کدام از رقم‌های آن‌ها از مجموعه $\{1,2,3,4\}$ انتخاب شده‌اند به طوری که رقم 3 سمت راست رقم 4 قرار نمی‌گیرد. اگر $a_n$ تعداد اعداد n رقمی با این خاصیت باشد. کدام گزینه به ازای $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ صحیح است:**

۱) $a_n=4a_{n-1}-1$

۲) $a_n=4a_{n-1}-6^{n-2}$

۳) $a_n=3a_{n-1}+3^{n-1}$

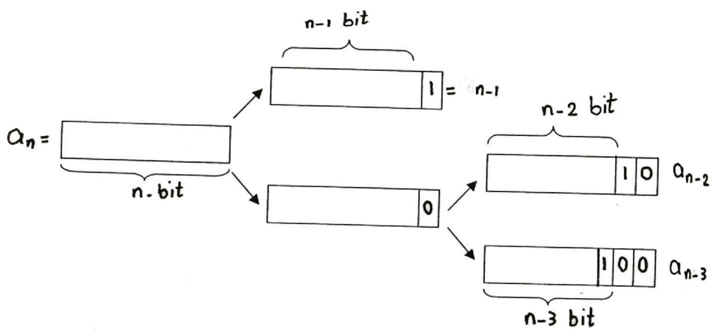
۴) $a_n=2a_{n-1}+6a_{n-2}$

**حل:** گزینه ۳ صحیح است.

می‌خواهیم تعداد اعداد $(n+1)$ رقمی با خاصیت مورد نظر را به دست آوریم اگر رقم سمت چپ 2,1 یا 3 باشد، n رقم بعدی هر عدد n رقمی با خاصیت مطلوب مسئله می‌تواند باشد. اگر رقم سمت چپ ۴ باشد، n رقم دیگر نباید 3 باشند. ولی هر کدام می‌توانند 1 ، 2 یا 4 باشند. بنابراین $3^n$ حالت دارد و در نتیجه $a_{n+1}=3a_n+3^n$ و یا به طور کلی $a_n=3a_{n-1}+3^{n-1}$ .

**مثال**: رابطه بازگشتی تعداد رشته‌های 8 بیتی که 3 صفر متوالی ندارند .

**حل:**




$$\Rightarrow a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

# حل روابط بازگشتی

## ـ حل روابط بازگشتی از طریق جایگذاری‌های متوالی

منظور از حل یک رابطه بازگشتی به دست آوردن فرمولی برابر جملهٔ عمومی آن است که $a_n$ (جمله عمومی) فقط بر حسب n بیان شود.
ساده‌ترین روش حل برای روابط بازگشتی، روش جایگذاری‌های متوالی است که همیشه قابل استفاده نیست.

**مثال:** رابطه بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad , \quad a_1 = 1$ را حل کنید.

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2(2a_{n-2} + 1) + 1$$
$$= 2^2 a_{n-2} + 2 + 1$$
$$= 2^2 (2a_{n-3} + 1) + 2 + 1$$
$$= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$
$$= \cdots = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1$$
$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

## ـ روابط بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت

روابط بازگشتی به صورت $C_0 x_n + C_1 x_{n-1} + \cdots + C_m x_{n-m} = 0 \qquad (۱)$ را رابطه بازگشتی همگن با ضرایب ثابت گوییم. خطی است چون درجه کلیه $x_n$ها یک است و همگن است چون $f(n) = 0$ است. برای حل این دسته از روابط بازگشتی کافی است $x_n = r^n$ را جایگزین در این رابطه کنیم و آن را تبدیل به یک چند جمله‌ای از درجه m کنیم. به این چند جمله‌ای، معادله مشخصه گویند و به فرم زیر است:

$$C_0 r^n + C_1 r^{n-1} + \cdots + C_m r^{n-m} = 0$$

با ضرب طرفین معادله بالا در $\frac{1}{r^{n-m}}$ به معادله (۲) $\quad C_0 r^m + C_1 r^{m-1} + \cdots + C_m = 0$ می‌رسیم.

حال فرض کنید $r_1, r_2, \cdots, r_m$ ریشه‌های معادله مشخصه رابطه (۲) باشد. در این صورت می‌توان سه پیشامد را متصور شد:

۱) m ریشهٔ متمایز وجود داشته باشد که در این صورت مسئله به فرم (۳) $x_n = K_0 r_1^n + K_1 r_2^n + \cdots + K_m r_m^n$ می‌شود که در آن ضرایب $K_0, K_1, \cdots, K_m$ به وسیله مقادیر اولیه مشخص می‌شود.

**یادداشت:**

.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................
.......................................................................................................................................

۲) دارای ریشه‌های تکراری باشد که در این صورت با توان‌هایی از ضریب n در پشت جواب عمومی همراه می‌شود فرض کنید $r_1 = r_2 = r_3$ در این صورت جواب به فرم:

$$x_n = K_1 r_1^n + K_2 n r_2^n + K_3 n^2 r_3^n \qquad (۴)$$

۳) معادله مشخصه ریشه صحیح نداشته باشد در این صورت مانند حالت (۱) ریشه‌های مختلط را محاسبه می‌کنیم سپس آن را به فرم معادلهٔ (۳) می‌نویسیم.

**تذکر:** در این حالت باید فرم‌های مختلف نمایش اعداد مختلط را از قبیل فرم قطبی، فرمول اویلر و ... را بدانید.

✓ نکته : دنباله فیبوناچی از نوع بازگشتی خطی همگن با ضریب ثابت است پس می‌توان فرم بستهٔ آن را به صورت زیر به دست آورد.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n > 1$$
$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$

ابتدا معادله مشخصه این رابطه را به دست می‌آوریم:

$$r^2 - r - 1 = 0$$
$$r_1, r_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

حال با استفاده از رابطه (۱) جواب عمومی رابطه بازگشتی را تعیین می‌کنیم و در آخر با استفاده از مقادیر $f_1, f_0$ مقدار صحیح ضرایب را به دست می‌آوریم.

$$f_n = K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$
$$f_0 = 0 \;\Rightarrow\; K_1 + K_2 = 0$$
$$f_1 = 1 \;\Rightarrow\; K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \;\Rightarrow\; K_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \;,\; K_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

پس جواب نهایی به صورت زیر است:

$$f_n = \frac{\left(\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

**یادداشت:**

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

..........................................................................................................

## ـ روابط بازگشتی خطی ناهمگن با ضرایب ثابت

رابطه بازگشتی به فرم معادله (۵) $C_0x_n + C_1x_{n-1} + \cdots + C_mx_{n-m} = g(n)$ که در آن $g(n) \neq 0$ باشد را یک رابطه ناهمگن گویند. سپس می‌توان گفت رابطه همگن نوع خاصی از رابطه ناهمگن است. این روابط برخلاف روابط بازگشتی همگن برای حلشان روش عامی وجود ندارد اما برای فرم‌های مشخصی از روابط روش‌هایی ارائه شده که ما در این قسمت با چند روش از آن‌ها آشنا می‌شویم.

۱)اگر $U_n$ جواب عمومی فرم همگن شده با فرض $g(n) = 0$ در معادله (۵) باشد و $V(n)$ نیز جواب خصوصی معادله ناهمگن این معادله باشد در این صورت جواب رابطه بازگشتی ناهمگن (۵) به صورت $x_n = V_n + U_n$ خواهد بود.

**تذکر:** ما برای استفاده از این روش، نیاز به پیدا کردن جواب خصوصی معادله ناهمگن داریم که ممکن است کار آسانی نباشد اما یک روش کلی برای فرم‌های استاندارد نسبتاً ساده $g(n)$ وجود دارد که به صورت زیر است:

- چند جمله‌ای: مانند $g(n) = 5n^2 - 2n + 1$
- نمایی : مانند $g(n) = 3^n$
- چند جمله‌ای X نمایی : مانند $g(n) = 2^n\left(5n^2 + 3n + 1\right)$

۲) رابطه بازگشتی ناهمگن روبرو را (۶) $t_n = At_{n-1} + Bt_{n-2} + g(n)$ که در آن $g(n) = S^n$ (چند جمله‌ای از درجه N) است در نظر بگیرید. در این صورت اگر S ریشه معادله مشخصه رابطه (۶) یعنی $r^2 - Ar - B = 0$ نباشد آنگاه یک جواب خصوصی به فرم :

$$V_n = S^n\left(C_0 + C_1n + C_2n^2 + \cdots + C_Nn^N\right)$$

خواهد داشت.

اما در صورتی که S ریشه m ام معادله مشخصه (۶) باشد آنگاه جواب خصوصی رابطه بازگشتی (۶) به فرم زیر خواهد بود.

$$V_n = S^nn^m\left(C_0 + C_1n + C_2n^2 + \cdots + C_Nn^N\right)$$

❖ دقت کنید که در صورتی‌که $g(n)$ چند جمله‌ای ساده‌ای مانند $g(n) = 5n^2 - 2n + 1$ باشد آنگاه $S = 1$ در روش (۲) محسوب خواهد شد.

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**مثال: رابطه بازگشتی روبرو را در نظر بگیرید.**

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + g(n)$$

معادله مشخصه آن برابر با $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$ خواهد بود.

۱ـ اگر $g(n) = 3^n$ باشد آنگاه $V_n = 3^n An^2$ خواهد بود.

۲ـ اگر $g(n) = 3^n(5n+1)$ باشد آنگاه $V_n = 3^n n^2(An+B)$ خواهد بود.

۳ـ اگر $g(n) = 2^n(2n^2+4)$ باشد آنگاه $V_n = 2^n(An^2+Bn+C)$ خواهد بود.

**مثال: رابطه بازگشتی $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + g(n)$ را در نظر بگیرید.**

معادله مشخصه : $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$

حال اگر $g(n) = 3n+1$ باشد در این صورت جواب خصوصی رابطه بازگشتی به فرم $V_n = n(An+B)$ خواهد بود زیرا در اینجا $S = 1$ می‌باشد و S یک ریشه معادله مشخصه است بنابراین n باید در $V_n$ وجود داشته باشد.

## ـ روابط بازگشتی خطی ناهمگن با ضرایب متغیر

در صورتی که در معادله $C_0x_n + C_1x_{n-1} + C_2x_{n-2} + \cdots + C_mx_{n-m} = g(n)$ به جای ضرایب $0 \le i \le m$ و در $C_i$ توابعی از n وجود داشته رابطه بازگشتی حاصله را خطی ناهمگن با ضرایب متغیر می‌نامیم برای این گونه روابط بازگشتی روش حل عمومی شناخته شده وجود ندارد اما برای گونه‌های خاصی از آن‌ها روش‌هایی ارائه شده است که بعضاً روش‌های پیچیده‌ای هستند. در این قسمت فقط به یک روش نسبتاً ساده به نام «مجموع ضرایب» می‌پردازیم و تنها روش استفاده از آن را شرح می‌دهیم.

ـ در صورتی که رابطه بازگشتی به فرم مرتبه اول یعنی $f(n)x_n = g(n)x_{n-1} + h(m)$ (۷) باشد در این صورت می‌توان با روش مجموع ضرایب، این معادله بازگشتی را حل نمود.

دو طرف رابطه (۷) را در عبارت (۸) $S(n) = \dfrac{f(n-1)f(n-2)\ldots f(1)}{g(n)g(n-1)\ldots g(2)}$ ضرب می‌کنیم. بنابراین رابطه بازگشتی (۷) به فرم روبرو تغییر شکل می‌دهد. (۹) $Y_n = Y_{n-1} + S(n)h(n)$

که در آن $Y_n = g(n+1)S(n+1)x_n$ می‌باشد رابطه (۹) به ما این قابلیت را می‌دهد که $x_n$ را به فرم روبرو بیان کنیم.

$$x_n = \frac{1}{S(n)f(n)}\left(S(1)g(1)x_0 + \sum_{K=1}^{n} S(k)h(k)\right) \qquad (۱۰)$$

که این رابطه جواب رابطه بازگشتی (۷) می‌باشد. بنابراین برای حل این گونه روابط کافی است مجموع ضرایب $S(n)$ رابطه را به دست آوریم و آن را در معادله (۱۰) قرار دهیم تا جواب رابطه به فرم بسته به دست آید.

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

**تست: تابع پیچیدگی یک الگوریتم به صورت زیر مشخص شده است:**

$$T(n)=T(n-1)+\frac{5}{n} \qquad n>1$$
$$T(1)=0$$

**در حالتی که مقدار n مقدار کوچکی نباشد پیچیدگی زمانی این الگوریتم برابر است با :**

۱) $O\left(\frac{\ln n}{5}\right)$ ۲) $O(\ln n)$ ۳) $O\left(n^2\right)$ ۴) $O(5\lg n)$

**حل:** گزینه ۲ صحیح است.

رابطه بازگشتی فوق را می‌توان با ضرب n در دو طرف رابطه بازگشتی به فرم زیر نوشت:

$$nT(n)=nT(n-1)+5 \qquad n>1$$

که در آن $f(n)=n$ , $g(n)=n$ , $h(n)=5$ حال مجموع ضرایب را با استفاده از معادله

$$S(n)=\frac{f(n-1)f(n-2)\cdots f(1)}{g(n)g(n-1)\cdots g(2)}$$

می‌توان حساب کرد و آن را در معادله: $x_n=\frac{1}{S(n)f(n)}\left(S(1)g(1)x_0+\sum_{k=1}^{n}S(k)h(k)\right)$ قرار می‌دهیم تا جواب رابطه بازگشتی به دست آید.

$$S(n)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{n(n-1)(n-2)\cdots 2}=\frac{1}{n} \;\Rightarrow\; T(n)=5\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=5H_n$$

در نهایت با استفاده از فرمول

$$H_n \approx \ln n+\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

که در آن $\gamma \approx 0.58$ است جواب رابطه بازگشتی برابر با $O(\ln n)$ می‌شود پس گزینه صحیح ۲ می‌باشد.

**تست: یک رمز یک رشته دهدهی است که : (مهندسی کامپیوتر ـ سراسر ۸۶)**

**شامل 0 نباشد**

**شامل 11 , 12 , 21 , 22 نباشد.**

**اگر $a_n$ تعداد رمزهای به طول n باشد، کدام رابطه درست است؟ (توضیح که رشته دهدهی رشته‌ای است که در آن فقط از ارقام 0 تا 9 استفاده شده باشد).**

۱) $a_n=7a_{n-1}+8a_{n-2}$ ۲) $a_n=77a_{n-2}+8a_{n-3}$

۳) $a_n=7a_{n-1}+7a_{n-2}$ ۴) $a_n=7a_{n-1}+14a_{n-2}$

**یادداشت:**

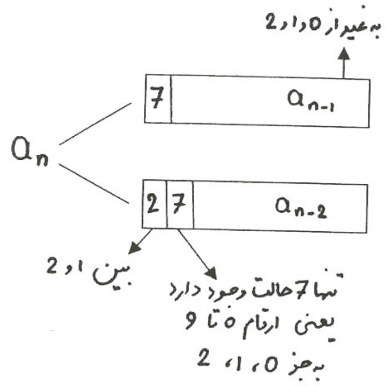
..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

**حل:** گزینه ۴ صحیح است.




**تست : فرض کنیم $P(n,k)$ تعداد افرازهای n به دقیقاً k جمعوند (صحیح مثبت) باشد (جمعوند به هر یک از اعدادی که حاصل جمع آن‌ها برابر n شود گویند.) کدام رابطه بازگشتی در مورد $P(n,k)$ صحیح است؟ $\left(n,k\in\mathbb{Z}^+\right)$ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)**

۱) $P(n,k)=P(n-k,k)+P(n-1,k)$

۲) $P(n,k)=P(n-1,k-1)+P(n-k,k)$

۳) $P(n,k)=P(n-k,k-1)+P(n-1,k-1)$

۴) $P(n,k)=P(n-k,k-1)+P(n-1,k)$

**حل:** گزینه ۲ صحیح است.

توضیح: تعداد روش‌هایی که می‌توان n عدد صحیح و مثبت n را به صورت مجموع $1\le k\le n$ عدد صحیح و مثبت نوشت برابر است با $\binom{n-1}{n-k}$ در نتیجه $p(n,k)=\binom{n-1}{n-k}$ با یک جایگذاری ساده در گزینه می‌توان دریافت پاسخ گزینه ۲ است.

**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

## تابع مولد

یک تابع مولد برای $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ عبارتست از سری توانی $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

یاد آوری :

در صورتی $|x|<1$ باشد آنگاه :

۱) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$

۲) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots$

۳) $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots$

۴) $\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty} k\,x^k$

۵) $\frac{1}{(1-x)^3}=1+\frac{3\times 2}{2}x+\frac{4\times 3}{2}x^2+\ldots$

۶) $\frac{1}{(1-x)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m-1+n}{m-1}x^n$

۷) $\frac{1}{1-Cx}=1+Cx+C^2x^2+C^3x^3+\ldots$

✓ **نکته** : در صورتی که $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ , $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند که به ترتیب با تابع مولدهای $G_a(s)$ و $G_b(s)$ متناظر باشند در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که به ازای هر $n\geq 0$ , $a_n=b_n$ شود آن است که به ازای هر S، $G_a(s)=G_b(s)$

✓ **نکته** : اگر $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ , $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد حقیقی به ترتیب با توابع مولد $G_a(x)$ , $G_b(x)$ باشند در این صورت:

۱ـ به ازای هر عدد حقیقی با تابع $cG_a(x)$ تابع مولد دنباله $\{ca_n\}_{n=0}^{\infty}$ است.

۲ـ تابع مولد $c_n=a_n+b_n$ برابر $G_a(x)+G_b(x)$ است.

۳ـ $a_n=\frac{1}{n!}G^{(n)}(0)$

۴ـ تابع مولد دنباله $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ عبارتست از $G_a(S).G_b(S)$.

**یادداشت:**

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

**مثال: تابع مولد دنباله** $C_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}$ **را بیابید.**

**حل:** با فرض $b_n = 1 \, , \, a_n = \frac{1}{n!}$ کافی است تابع مولد این دو را در هم ضرب کنیم.

بنابراین داریم:

$$G_a(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+... = e^x$$

$$G_b(x) = 1+x+x^2+... = \frac{1}{1-x}$$

$$G(x) = e^x . \frac{1}{1-x} = \frac{e^x}{1-x}$$

✓ **نکته** : در صورتی که تابع مولد دنباله $\{a_n\}$ برابر $G(x)$ باشد در این صورت:

۱ـ $G'(x)$ تابع مولد $\{(n+1)a_{n+1}\}$ است.

۲ـ $x\,G'(x)$ تابع مولد دنباله $\{n\,a_n\}$ است.

۳ـ $\int_0^x G(t)dt$ تابع مولد دنباله $C_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{a_n-1}{n} & n \ge 1 \end{cases}$ است.

✓ **نکته** : اگر $g(x)$ تابع مولد دنباله $\{a_r\}$ باشد $(1-x)g(x)$ تابع مولد دنباله $a_r - a_{r-1}$ است و $\frac{g(x)}{1-x}$ تابع مولد دنباله $b_r = \sum_{i=0}^{r} a_i$ است.

**مثال: تابع مولد برای** $a_r = 2r + r^2$ **را بیابید.**

**حل:** $g(x) = \frac{1}{1-x}$ تابع مولد دنباله $\{1\}$ است. بنابراین $f(x) = xg'(x)$ تابع مولد $\{r\}$ است در نتیجه $xf'(x)$ هم تابع مولد دنباله $r^2$ است بنابراین برای به دست آوردن تابع مولد دنباله $a_r$ کافی است $2xg'(x)+x\left(xg'(x)\right)'$ را محاسبه کنیم که عبارتست از:

$$\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

**یادداشت:**

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

**تست: اگر $G(x)$ یک تابع مولد برای دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ باشد آنگاه یک تابع مولد برای دنباله $\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$ چیست؟**

۱) $G(x)$ ۲) $G(nx)$ ۳) $xG'(x)$ ۴) $G(x^n)$

حل: گزینه ۳ صحیح است.

$$\{na_n\}_{n=0}^{\infty} = 0\times a_0 + 1\times a_1x + 2a_2x^2 + \ldots$$

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

$$G'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots$$

اگر $G'$ را در یک $x$ ضرب کنیم دنباله مورد نظر به دست خواهد آمد.

$$xG'(x) = \{na_n\}_{n=0}^{\infty}$$

**تست : تابع مولد دنباله $a,0,1,a,a^2,a^3,\ldots$ که در آن $a \neq 0$ کدام است؟**

۱) $\frac{ax}{1+x}$ ۲) $\frac{x}{1+ax}$ ۳) $\frac{ax^2}{1-x}$ ۴) $\frac{x^2}{1-ax}$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

گزینه ۱ و ۲ نمی‌تواند باشد زیرا جملات تولید شده از طریق آن‌ها یک در میان مثبت و منفی است، گزینه ۳ هم برای کلیه جملات ضریب a دارد در نتیجه گزینه ۴ صحیح است.

$$x^2\left(\frac{1}{1-ax}\right) = x^2\left(1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \ldots\right) = 0 + 0\times x + x^2 + ax^3 + a^2x^4 + \ldots$$

راه حل دیگر :

$$0 + 0x + 1x^2 + ax^3 + a^2x^4 + a^3x^5 + \ldots = x^2\left[1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \ldots\right]$$

**تست: تابع مولد دنباله $a_n = \binom{n+4}{n}$ کدام است؟**

۱) $\frac{1}{(1-x)^5}$ ۲) $\frac{1}{(1-x)^n}$ ۳) $(1-x)^n$ ۴) $(1-x)^5$

گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m-1}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+5-1}{n}x^n$$

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

## ـ کاربرد توابع مولد در حل مسائل ترکیباتی

۱ـ در حالتی که بخواهیم n شی مشابه را بین m نفر یا دسته‌ای خاص (که دو به دو متمایز هستند) تقسیم کنیم با محدودیت‌های در نظر گرفته شده می‌توان از تابع مولد استفاده کرد.

**مثال: فرض کنید 12 سیب مشابه را بین سه کودک طوری تقسیم کنیم که به نفر اول حداقل 2 سیب و به نفر دوم حداقل 1 سیب برسد. تعداد حالت‌های ممکن برای اینکه این 12 سیب بین این سه کودک تقسیم شوند چیست؟**

$$\left(\underbrace{x^2+x^3+\dots}_{A}\right)\left(\underbrace{x^1+x^2+x^3+\dots}_{B}\right)\left(\underbrace{x^0+x^1+x^2+x^3+\dots}_{C}\right)$$

$x^2x^6x^4=x^{12}$ : تعداد حالتی که می‌توان این کار را کرد

یا

$$x^5x^7x^0=x^{12}$$

به عبارتی دیگر ضریب $x^{12}$ را می‌خواهیم .

$$x^2\left(1+x+x^2+\dots\right)x\left(1+x+x^2+\dots\right)\left(1+x+x^2+\dots\right)=\frac{x^3}{(1-x)^3}$$

$$x^3\times\frac{1}{(1-x)^3}=x^3\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^n \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^{n+3} \qquad n+3=12 \;\Rightarrow\; n=9$$

با یک جایگذاری ساده جواب به دست می‌آید $\binom{11}{9}$

راه حل دیگر:

$$\underset{+2}{x_1}+\underset{+1}{x_2}+x_3=9 \;\Rightarrow\; \binom{9+3-1}{9}=\binom{11}{9}$$

**تست: دنباله $a_1,a_2,\dots,a_n$ که $a_i\in\{-2,1,2\}$ها را k تکه‌ای نامیم، هرگاه $|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|=k$ فرض کنید $b_k$ تعداد دنباله‌های k تکه‌ای متمایز باشند، تعداد $b_5$ چقدر است؟**

۱) 8   ۲) 11   ۳) 16   ۴) 21

حل: گزینه ۴ صحیح است.

$$|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|=5$$

$$\left(x+2x^2\right)+\left(x+2x^2\right)+\dots+\left(x+2x^2\right)$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(x+2x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\left(1+2x\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k x^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}$$

$$2\binom{5}{0}+2\binom{4}{1}+2^2\binom{3}{2}=1+8+12=21$$

۲ـ اگر n شی متمایز را بخواهیم بین m فرد یا طبقه متمایز با محدودیت خاص قرار دهیم از تابع مولد $e^x$ استفاده می‌شود:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

که در این صورت ضریب $x^n$ که در $n!$ ضرب می‌شود مورد نظر ماست.

**مثال:** به چند طریق می‌توان 21 مهره غیر همانند را در سر جعبه غیرهمانند توزیع کرد به طوری که در جعبه اول تعداد زوج و در جعبه دوم تعداد فردی از مهره‌ها قرار گیرند؟

$$\left(x^0+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\right)\left(x^0+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\times\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\times e^x$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)e^x=\frac{1}{4}\left(e^{3x}-e^{-x}\right)=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-(-1)^n}{n!}x^n\right)$$

$$n!\times x^n\ \text{ضریب}=\frac{1}{4}\left(\frac{3^n-(-1)^n}{1}\right)$$

✓ **نکته :**

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots$$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$$

**یادداشت:**

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

## خاصیت رابطه‌ها

**ـ تعاریف :**

۱ـ رابطهٔ R را روی مجموعه A بازتابی می‌گوییم هرگاه به ازاء هر $x \in A$ ، $(x,x) \in R$

۲ـ رابطه R را روی مجموعه A متقارن می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x,y \in A$ از $(x,y) \in R$ ، $(y,x) \in R$ نتیجه شود.

۳ـ مجموعهٔ A مفروض است. رابطه R را روی A متعدی گوییم هرگاه به ازای هر $x,y,z \in A$ از $(x,y),(y,z) \in A$ ، $(x,z) \in R$ نتیجه شود.

۴ـ رابطه R بر روی مجموعه A مفروض است، R را پادمتقارن نامیم هرگاه به ازای هر $a,b \in A$ از $aRb, bRa$ بتوان نتیجه گرفت که $a=b$ است. به زبانی دیگر یعنی :

$$\forall x,y \in A : xRy \ , \ yRx \ \rightarrow \ x=y$$

یا

$$\forall x,y \in A : xRy \ , \ x \neq y \ \rightarrow \ y \not{R} x$$

۵ـ رابطه R ضد بازتابی است هرگاه $\forall x \in A ; (x,x) \notin \mathbb{R}$

✓ **نکته : در حالت کلی بر روی مجموعه $A=\{1,2,...,n\}$ تعداد رابطه‌هایی که می‌توان نوشت به طوری که خواص زیر را دارا باشند به صورت زیر است:**

۱ـ بازتابی باشد : $2^{n^2-n}$

۲ـ متقارن باشد : $2^{\frac{n^2+n}{2}}$

۳ـ پاد متقارن باشد : $2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

۴ـ بازتاب و پاد متقارن باشد $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

۵ـ بازتاب و متقارن باشد $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

۶ـ متقارن و پاد متقارن باشد $2^n$

**تست: مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ مفروض است چند رابطه روی A وجود دارد به طوری که خواص پاد متقارن و بازتابی (هر دو) را دارا باشد.**

۱) $3^5$ ۲) $3^6$ ۳) $3^7$ ۴) $3^8$

**یادداشت:**

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

............................................................................................................................

**حل:** گزینه ۲ صحیح است.

پاد تقارنی و بازتابی : $3^{\frac{n^2-n}{2}} \Rightarrow 3^{\frac{16-4}{2}} = 3^6$

$n = 4$

**چند نکته:**

- ✓ رابطه R متقارن است اگر و فقط اگر $R = R^{-1}$
- ✓ رابطه R متعدی است اگر و فقط اگر $R^2 \subseteq R$
- ✓ اگر R بازتاب باشد $\bar{R}$ ضد بازتاب است و بالعکس.
- ✓ اگر R متقارن باشد $\bar{R}$ نیز متقارن است و بالعکس.
- ✓ اگر R هر خاصیتی داشته باشد آنگاه $R^{-1}$ نیز همان خواص را دارد.

**تست: فرض کنید $R_2, R_1$ دو رابطه بازتابی و متقارن روی مجموعه A باشند کدام یک از گزاره‌های زیر درست نیست؟ (سراسری ۸۲)**

۱) $R_1 \subseteq R_1^2$

۲) $R_1 \Delta R_2$ متقارن نیست.

۳) $\bar{R}_1$ متقارن است.

۴) $R_1 \Delta R_2$ بازتابی نیست $R_1 \Delta R_2 = (R_1 \cup R_2) - (R_1 \cap R_2)$

**حل:** گزینه ۲ صحیح است.

## نکات بسیار مهم :

- اگر $R_2, R_1$ دو رابطه روی مجموعه A باشند آنگاه:

- ✓ اگر $R_2, R_1$ بازتابی باشند آنگاه $R_1 \cap R_2$ نیز بازتابی هستند.
- ✓ اگر $R_2, R_1$ متقارن باشند آنگاه $R_1 \cap R_2$ نیز متقارن هستند.
- ✓ اگر $R_2, R_1$ پادمتقارن باشند آنگاه $R_1 \cap R_2$ نیز پادمتقارن هستند.
- ✓ اگر $R_2, R_1$ تعدی باشند آنگاه $R_1 \cap R_2$ نیز تعدی هستند.

- در مجموعه A که در آن $|A| = n$ باشد در این صورت:

- ✓ اگر R رابطه ای بازتابی روی A باشد آنگاه $|R| \geq n$
- ✓ اگر $R_2, R_1$ دو رابطه روی A باشند و $R_1 \subseteq R_2$ باشد در این صورت اگر $R_1$ بازتابی (متقارن، پادمتقارن، تعدی) می‌باشد. آنگاه $R_2$ بازتابی (متقارن، پادمتقارن، تعدی) است.
- ✓ اگر R رابطه‌ای هم ارزی روی A باشد آنگاه $n \leq |R| \leq n^2$

**یادداشت:**

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

- ✓ رابطه $R$ روی مجموعهٔ $A$ را به ترتیب جزئی یا رابطه ترتیبی جزئی گوییم هرگاه $R$ سه خاصیت بازتابی، پادمتقارن، و تعدی را داشته باشد.
- ✓ رابطه هم ارزی $R$ روی مجموعهٔ $A$ رابطه‌ای است که سه خاصیت بازتابی، متقارن و تعدی را داشته باشد.
- ✓ اگر $A$ یک مجموعه و $I$ مجموعه‌ای اندیسگذار به ازای هر $R_i , i \in I$ رابطه‌ای روی $A$ باشد آنگاه:

$\bigcap_{i\in I} R_i$ روی $A$ بازتابی است اگر و فقط اگر هر $R_i$ روی $A$ بازتابی باشد. اما برای $\bigcup_{i\in I} R_i$ این رابطه صحیح <u>نمی‌باشد</u>.

- ✓ اگر $R_2 , R_1$ دو رابطه متقارن روی مجموعه $A$ باشند. اگر $R_1 . R_2 \subseteq R_2 . R_1$ باشد آنگاه $R_1 . R_2 = R_2 . R_1$ است.
- ✓ به ازای مجموعه‌های $C , B , A$ و روابط $R_1 \subseteq A \times B \;\; , \;\; R_2 \subseteq B \times C$ باشد آنگاه $\left(R_1 . R_2\right)^c = R_2^c . R_1^c$ است.
- ✓ اگر $R$ رابطه‌ای بازتابی روی مجموعه $A$ باشد آنگاه $\left(R.R\right) R^2$ نیز روی $A$ بازتابی است.
- ✓ : اگر به ازای مجموعه‌های $A$ , $B$ , $C$ روابط $R_1 \subseteq A \times B \, , \, R_2 \subseteq B \times C \, , \, R_3 \subseteq B \times C$ باشد در این صورت می‌توان نتیجه گرفت که : $R_1 . \left(R_2 \cup R_3\right) = \left(R_1 . R_2\right) \cup \left(R_1 . R_3\right)$
- ✓ $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$
- ✓ هنگامی $2^A \cup 2^B = 2^{A \cup B}$ است که $B \subseteq A$ باشد یا $A \subseteq B$ .

**تست: کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟**

۱) $2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}$

۲) $2^A \cup 2^B = 2^{A \cup B}$

۳) $2^A \setminus 2^B = 2^{A \setminus B}$

۴) موارد ۳ و ۱

**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

- ✓ **نکته**: تعداد زیر مجموعه‌های $K$ عضوی یک مجموعه $n$ عضوی برابر است با : $\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 \\ \binom{n-1}{K-1} + \binom{n-1}{K} \end{cases}$$

$$\left(x + y\right)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n} y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

بنابراین

$$3^n = \left(1 + 2\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

$$2^n = \left(1 + 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

**یادداشت:**

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

پس در حالت کلی

$$(1+a)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$$

**تست: فرض کنید که n یک عدد طبیعی باشد مقدار عبارت** $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j}\binom{n}{i}$

۱) $2^{n+1}$ ۲) $3^n$ ۳) $2^{n+1}+1$ ۴) $4^n-3^n+2$

گزینه ۲ صحیح است.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = 3^n$$

**تست: کدامیک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (مهندسی کامپیوتر ــ سراسری ۸۷)**

۱)بستار تقارنی (symmetric closure) یک رابطه متعدی، متعدی است.

۲) بستار بازتابی (reflexive closure) یک رابطه متعدی، متعدی است.

۳) بستار تقارنی (symmetric closure) یک رابطه بازتابی،بازتابی است.

۴) بستار تعدی (transitive closure) یک رابطه متقارن، متقارن است.

**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

## اصل شمول و عدم شمول

### مقدمه

فرض کنید K ویژگی درباره اشیاء مجموعه S داشته باشیم و $A_i$ زیر مجموعه ای از S باشد که تمام اعضای آن واجد ویژگی i هستند. می‌خواهیم تعداد اشیایی از S را حساب کنیم که حداقل یکی از این K ویژگی را داشته باشند یا تعداد اشیایی را حساب کنیم که هیچ کدام از K ویژگی مذکور را دارا نباشند برای این منظور از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم.

ـ اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد اعضای A را با $|A|$ نشان می‌دهیم.

ـ اگر $A_2 , A_1$ دو مجموعه متناهی باشند آنگاه : $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

در واقع زمانی که $|A_1|+|A_2|$ را محاسبه می‌کنیم، اعضای مجموعه‌های $A_2 , A_1$ را جداگانه می‌شماریم و جمع می‌کنیم. در نتیجه عضوهایی که در $A_2 , A_1$ در اشتراک هستند دو بار شمرده می‌شوند و هنگام محاسبه $|A_1 \cup A_2|$ باید اثر این شمارش دوباره را حذف کنیم. رابطه بالا اصل شمول و عدم شمول برای دو دومجموعه نامیده می‌شود.

**قضیه :** فرض کنید $P_k ,..., P_2 , P_1$ ویژگی‌های مشخص باشند و $A_i$ زیرمجموعه‌ای از S باشد که اعضای آن دارای ویژگی $P_i$ هستند در این صورت تعداد اعضایی از S که هیچ یک از ویژگی‌های $P_1$ تا $P_k$ را ندارند برابر است با :

$$|\bar{A}_1 \cap ... \cap \bar{A}_k| = |S| - \sum_{i=1}^{K} |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<l} |A_i \cap A_j \cap A_l| + ... + (-1)^K |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_K|$$

✓ **نکته:** تعداد اعضایی از S که حداقل دارای یکی از ویژگی‌های $P_1$ تا $P_K$ هستند برابر است با :

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = \sum_{i=1}^{K} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<l} |A_i \cap A_j \cap A_l| - ... + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_K|$$

**مثال: تعداد اعداد طبیعی بین 1 و 1000 را حساب کنید که بر هیچ یک از اعداد 5 , 6 , 8 بخش‌پذیر نباشند.**

**حل:** $P_1$ را ویژگی بخش پذیر بودن یک عدد طبیعی بر $P_2 , 5$ را بخش‌پذیر بودن یک عدد طبیعی بر 6 و $P_3$ را بخش پذیر بودن یک عدد طبیعی بر 8 در نظر می‌گیریم. $A_i$ را مجموعه اعداد طبیعی بین 1 و 1000 در نظر می‌گیریم که دارای ویژگی $P_i$ هستند واضح است که :

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$$

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor = 125$$

**یادداشت:**

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

اعداد طبیعی متعلق به $A_1 \cap A_2$ بر 5 , 6 (یعنی بر 30) بخشپذیرند. اعداد متعلق به $A_1 \cap A_3$ بر 40 و اعداد متعلق به $A_2 \cap A_3$ بر 24 بخش پذیر باشند در نتیجه :

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{40} \right\rfloor = 25$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{24} \right\rfloor = 41$$

بالاخره اعضای $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ اعدادی از $N_{1000}$ هستند که بر 120 بخشپذیرند. بنابراین:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{120} \right\rfloor = 8$$

در نتیجه طبق اصل شمول ـ عدم شمول، تعداد اعداد بین 1 تا 1000 که به هیچ یک از اعداد 5 , 6 , 8 بخشپذیر نیستند برابر است با :

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

**تست: فرض کنید $A = \{1, 2, 3, ..., 600\}$ حاوی تمامی اعداد طبیعی بین یک تا 600 باشد، تعداد اعضای A که بر 3 یا 5 یا 7 بخش‌پذیر نیستند چند تاست؟** (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۱۳۸۹)

۱) 275 ۲) 270 ۳) 280 ۴) 405

**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

$$|N_A| = 600 \qquad |N_{3\wedge 5}| = |N_{15}| = \left\lfloor \frac{600}{15} \right\rfloor = 40$$

$$|N_3| = \left\lfloor \frac{600}{3} \right\rfloor = 200 \qquad |N_{3\wedge 7}| = |N_{21}| = \left\lfloor \frac{600}{21} \right\rfloor = 28$$

$$|N_5| = \left\lfloor \frac{600}{5} \right\rfloor = 120 \qquad |N_{5\wedge 7}| = |N_{35}| = \left\lfloor \frac{600}{35} \right\rfloor = 17$$

$$|N_7| = \left\lfloor \frac{600}{7} \right\rfloor = 85 \qquad |N_{3\wedge 5\wedge 7}| = |N_{105}| = \left\lfloor \frac{600}{105} \right\rfloor = 5$$

$$|N_{\neg(3\vee 5\vee 7)}| = 600 - (200 + 120 + 85) + (40 + 28 + 17) - 5 = 275$$

**یادداشت:**

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

....................................................................................................

# توابع

**تعریف :** می‌گوییم $f:A\to B$ یک تابع است هرگاه :

۱- $P\subseteq A\times B$

۲- $\forall(x,y)\in f \;,\; (x,y)\in f \;\Rightarrow\; y=y_1$

**تست: مقدار a را چنان بیابید که $f:\{1,2,3\} \;\to\; \mathbb{R}$ یک تابع باشد.**

$$f:\left\{(1,a),\left(1,a^2-2a\right),(2,3),\left(3,a^2\right)\right\}$$

۱) $a=0$ یا $a=3$ ۲) $a=0$ یا $a=3$ یا $a=\pm\sqrt{3}$

۳) $a=\pm\sqrt{3}$ ۴) هیچکدام

**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

$$a^2-2a=a \;\Rightarrow\; a^2-3a=0 \;\Rightarrow\; a(a-3)=0 \;\Rightarrow\; a=0 \text{ یا } a=3$$

**ـ تعریف تابع تام :** تابع $f:A\to B$ تام است هرگاه $D_f=A$

**ـ تعریف تابع جزئی :** تابع $f:A\to B$ را تابع جزئی می‌نامیم هرگاه فقط در تعریف تابع صدق کند.

- ✓ **نکته:** با توجه به دو تعریف بالا می‌توان نتیجه گرفت هر تابع تام خود یک تابع جزئی است.
- ✓ **نکته:** تعداد توابع تام f از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B برابر با $m^n$ است.
- ✓ **نکته:** مجموعه تمام توابع تام از مجموعهٔ A به مجموعه B را با $B^A$ نمایش می‌دهیم واضح است که $\left|B^A\right|=|B|^{|A|}$ یعنی همواره مجموعه تابع دوم به توان مجموعه اول می‌رسد.
- ✓ **نکته:** تعداد توابع (توابع جزیی) از مجموعه n عضوی A به مجموعه m عضوی B برابر $(m+1)^n$ .

**تعریف:** هرگاه $f:A\to B$ و $g:A\to B$ دو تابع باشند آنگاه:

$$\forall x\in D_f\cap D_g$$

$$\left(f\overset{*}{\pm}g\right)(x)=f(x)\overset{*}{\pm}g(x)$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

$$\forall x\in D_f\cap D_g\setminus\{x\,|\,g(x)=0\}$$

$$(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{f/g}=D_f\cap D_g\setminus\{x\,|\,g(x)=0\}$$

یادداشت:

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

✓ **نکته:** هرگاه $\begin{array}{l} f:A\to B \\ g:B\to A \end{array}$ دو تابع باشند آنگاه:

$$gof(x)=g(f(x))$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f \,|\, f(x)\in D_g\}$$

✓ **نکته:** توابعی ضابطه دارند که خروجی آن‌ها یک عدد باشد.

✓ **نکته:** $fog$ برای هر تابعی می‌تواند تعریف شود.

**توجه ۱ـ** هرگاه $g,f$ دو تابع از A به B باشند آنگاه $f\bigcup g$ لزوماً تابع نمی‌باشد در حالی که $f\bigcap g$ همواره تابع است.

**توجه ۲ـ** بنا بر قرارداد $\phi$ یک تابع از A به B است.

ـ **تعریف تصویر معکوس تابع** : هرگاه $f:A\to B$ آنگاه برای $D\subseteq B$ , $f^{-1}(D)$ را تصویر معکوس D تحت f می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1}(D)=\{x\in A \,|\, f(x)\in D\}$$

ـ **تعریف تصویر:** هرگاه $f:A\to B$ یک تابع باشد و $C\subseteq A$ آنگاه تصویر C تحت f را با $f(c)$ نمایش می‌دهیم.

$$f(c)=\{f(x) \,|\, x\in c\}$$

ـ **تعریف تابع یک به یک :** هرگاه $f:A\to B$ یک تابع باشد گوییم در صورتی یک به یک است که:

$$\forall x_1,x_2\in A \ \ (f(x_1)=f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1=x_2)$$

به عبارت دیگر به ازای هر $y\in B$ حداکثر یک $x\in A$ وجود داشته باشد به طوری که $y=f(x)$ باشد.

✓ **نکته** : اگر $f:A\to B$ تابع تام یک به یک باشد آنگاه $|A|\le|B|$

ـ **تعریف تابع پوشا :** گوییم $f:A\to B$ پوشاست هرگاه $\forall y\in B \ , \ \exists x\in A \ \ y=f(x)$

به ازای هر $y\in B$ حداقل یک x از A وجود داشته باشد به طوری که $y=f(x)$

**توجه:** اگر $f:A\to B$ آنگاه $\mathbb{R}=f(A)$ بدیهی است که $f:A\to B$ پوشاست اگر و تنها اگر

$R_f=B$ یا $B=f(A)$

✓ **نکته** : هرگاه $f:A\to B$ پوشا باشد آنگاه $|B|\le|A|$

ـ **تعریف تابع دو سویی:** گوییم تابع $f:A\to B$ دو سویی است هرگاه f یک تابع تام، یک به یک و پوشا باشد در این صورت گوییم **B , A** تناظر یک به یک دارند. **A** هم توان با **B** است.

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

✓ **نکته :** هرگاه $f:A\to B$ یک تناظر یک به یک داشته باشد آنگاه $|A|=|B|$

✓ **نکته :** تعداد توابع تام پوشا از مجموعه m عضوی $B(m\le n)$ برابر با $(m-k)^n$ است.

✓ **نکته :** تعداد توابع تام ناپوشا از مجموعه m عضوی $B(m\le n)$ برابر با $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$

**تست: فرض کنید A یک مجموعه ۸ عضوی و B یک مجموعه 5 عضوی باشد تعداد تمامی تابع های پوشا از A به B چند است؟**

۱) 65610 ۲) 2560 ۳) 126000 ۴) 340625

**حل :** گزینه ۳ صحیح است.

می‌دانیم که تعداد توابع پوشایی که از یک مجموعه n عضوی باشد برابر با !n است و از A به B تعریف شده در نتیجه از 8 به 5 است. پس باید به 2 و 3 و 4 و 5 بخش پذیر باشد. پس به عبارتی دیگر باید به کلیه اعداد !5 یعنی $(2\times3\times4\times5)$ بخش‌پذیر باشد.
بنابراین تنها گزینه‌ای که بر !5 بخش‌پذیر است، گزینه ۳ می‌باشد.

✓ **نکته : تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضوی به مجموعه m عضوی همواره بر !m بخش‌پذیر است.**

✓ **نکته** : هر تابع، که از یک مجموعه $n\times n$ باشد و به یک مجموعه $n\times n$ برود، باید هم یک به یک و هم پوشا باشد.

✓ **نکته : هرگاه $|A|=|B|=n$ آنگاه هر تابع تام $f:A\to B$ یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.**

**نتیجه :** تعداد توابع تام (یک به یک) پوشا از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعه n عضوی B برابر !n است.

## اصل لانه کبوتری

هرگاه n کبوتر بخواهند در m لانه قرار گیرند به طوری که $n>m$ آنگاه حداقل در یک لانه بیش از یک کبوتر وجود دارد (حداقل 2 کبوتر)

**اصل لانه کبوتر تعمیم یافته:**

هرگاه n کبوتر بخواهند در m لانه قرار گیرند آنگاه در حداقل یک لانه $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ کبوتر قرار می‌گیرد.

✓ **نکته** : هرگاه $f:A\to B$ یک تابع تام باشد و $|A|=|B|<\infty$ باشد در این صورت f یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد.

**مثال: تعداد تابع $f:\{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$ پوشا باشد چقدر است؟**

$$(4)_4=\frac{4!}{(4-4)!}=4!$$

می‌توان این سوال را با استفاده از اصل لانه کبوتر اثبات نمود.

✓ **نکته** : تعداد توابع پوشا (یک به یک تام) از مجموعه n عضوی A به مجموعه n عضوی B برابر با !n است.

**یادداشت:**

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

## پریش

منظور از پریش n شی «تعداد جایگشت‌های اعداد 1 تا n است به طوری که هیچ عدد iای در خانه iام قرار نگیرد» و آن را با نماد $d_n$ نمایش می‌دهند.

حال برای به دست آوردن $d_n$ این گونه عمل می‌کنیم:

از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم، ابتدا مجموعه‌های $A_1, \dots, A_n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$A_1$ : مجموعه تمام جایگشت‌های اعداد 1 تا n که عدد 1 در خانه اول قرار گیرد.

$A_2$ : مجموعه تمام جایگشت‌های اعداد 1 تا n که عدد 2 در خانه دوم قرار گیرد.

$\vdots$

$A_n$ : مجموعه تمام جایگشت‌های اعداد 1 تا n در خانه nام قرار گیرد.

به راحتی می‌توان دید که مجموعهٔ تمام جایگشت‌های نامطلوب (یعنی جایگشتی که حداقل یکی از اعداد به خانه هم شماره‌اش برود) برابر $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ است از طرفی دیگر داریم:

$d_n =$ (تعداد کل جایگشت‌های 1 تا n) ـ (تعداد جایگشت‌های نامطلوب) $= n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$

حال توجه کنید که به ازای هر i داریم $|A_i| = (n-1)!$ ، زیرا یک عنصر ثابت است و دیگر عنصرها را می‌توان به دلخواه جابجا کرد.در ضمن به عنوان مثال داریم:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = (n-3)!$$

در واقع تعداد عناصر هر اشتراک K تایی برابر $(n-K)!$ است چون K عنصر را ثابت در نظر می‌گیریم و $(n-K)$ عنصر دیگر را به دلخواه جابجا می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$d_n = n! - \left(|A_1| + |A_2| + \dots\right) + \left(|A_1| \cap |A_2| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n| + \right)$$

$$\dots + (-1)^n \left(|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|\right) = n! - \left(\underbrace{(n-1)! + \dots + (n-1)!}_{n = \binom{n}{1}}\right) +$$

$$\left(\underbrace{(n-2)! + \dots + (n-2)!}_{\binom{n}{2}}\right) - \dots + \underbrace{(n-n)!}_{\binom{n}{n}=1}$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$

**یادداشت:**

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

از طرفی می‌دانیم $\binom{n}{r}(n-r)!=\frac{n!}{r!}$ در نتیجه :

$$d_n = n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{n!}{n!}=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

**مثال: پریش 5 بیتی را به دست آورید؟**

$$d_5 = 5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)=5!-5!+\frac{5!}{2!}-\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{4!}-\frac{5!}{5!}$$
$$=60-20+5-1=44$$

✓ **نکته:**

تعداد جایگشت‌های حداقل یکی از عناصر با اندیس خود انطباق دارد $=|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$

$$=\binom{n}{1}(n-1)!-\binom{n}{2}(n-2)!+\ldots+\binom{n}{3}(n-3)!+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)!$$

تعداد جایگشت های کل $=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)!$

حالت خواسته $n!-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)!=(-1)\binom{n}{0}n!+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{K}\binom{n}{k}(n-k)$

$$d_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!$$

**چند یاد آوری :**

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

$$d_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)!$$

$$d_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}=n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\underset{n\to\infty}{d_n}=n!e^{-1}$$

**یادداشت:**

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

✓ **نکته** : احتمال این که n عنصر با n جایگاه ، هیچ عنصری در جایگاه خودش قرار نگیرد.

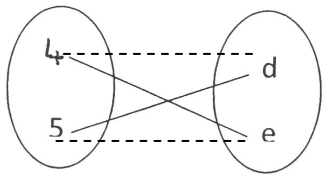
$$\frac{d_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

✓ **نکته** : اگر تعداد مهره‌ها و جایگاه‌ها به سمت بی‌نهایت باشد .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{dn}{n!}=e^{-1}$$

**مثال: تعداد توابع تام یک به یک** $\{1,2,3,4,5\}\to\{a,b,c,d,e\}$ **که** $f(1)\neq a$ ، $f(2)\neq b$ ، $f(3)\neq c$ **و** $f\{1,2,3\}=\{a,b,c\}$ **و** $f^{-1}\{d,e\}=\{4,5\}$ **چقدر است؟**

$$3!\sum_{K=2}^{3}\frac{(-1)^K}{K!}=2$$




$$(2,2)=2!=2$$
$$2\times 2=4$$

**یادداشت:**

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

## اعداد استرلینگ

تعداد حالاتی که n فرد متمایز را بتوان حول m میز طوری قرار دارد که در پشت هر نفر حداقل یک نفر قرار گیرد (هیچ میزی خالی نباشد)را با استرلینگ نوع اول (first type stirling) نمایش می‌دهند.

$$\text{first type stirling}=ft-s(n,m)$$

به وضوح دیده می‌شود که

$$(n-1)!:ft-s(n,1)$$

ترتیب در این جا مهم نیست.

$$Ft-S(n,n)=1$$

$$Ft-S(n,m)=0 \qquad m>n$$

$$Ft-S(n,2)=(n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\binom{n}{k}(k-1)!(n-k-1)!$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\times\frac{n!}{k!(n-k)!}(k-1)!(n-k-1)!$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\times\frac{n!}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!}(k-1)!(n-k-1)!$$

$$==n\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n!}{n}\left(\sum_{n=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)\right)=\frac{1}{2}(n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(n-1)!\times 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \ \Rightarrow\ (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

توجه کنید که :

$$\sum_{m=1}^{n}Ft-S(n,m)=n!$$

$$A(n)=\sum_{m=1}^{n}Ft-S(n,m)$$

$$A(n-1)=\sum_{m=1}^{n-1}Ft-S(n,m)$$

$$A(1)=1$$

$$A(n)=A(n-1)+(n-1)A(n-1)=nA(n-1)$$

**یادداشت:**

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

$$A(n)=n!$$

✓ **نکته:**

$$n!=\sqrt{2\pi}\,n\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

**تست: اگر $s(r,n)$ نمایش دهنده تعداد راه‌های توزیع r شی متمایز در n جعبه نامتمایز باشد بـه طـوری کـه هـیچ جعبه‌ای خالی نباشد کدام رابطه صحیح است؟**

۱) $s(r,n)=s(r-1,n)+ns(r-1,n-1)$

۲) $s(r,n)=s(r-1,n-1)+ns(r-1,n)$

۳) $s(r,n)=s(r-1,n-1)+rs(r-1,n)$

۴) $s(r,n)=s(r-1,n)+rs(r-1,n-1)$

**حل: گزینه ۲ صحیح است.**

## اعداد استرلینگ نوع دوم

به ازای $m\ge n$ ، $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$ طریق برای توزیع m شی متمایز بین n ظرف شماره گذاری شده (که صرفه نظر از شماره یکسان تلقی می‌شوند) به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند وجود دارد. اگر شماره‌های ظرف‌ها را برداریم، که در نتیجه در ظاهر نیز یکسان باشند در می‌یابیم که هر توزیع بین این n ظرف یکسان (ناتهی) متناظر !n توزیع مشابه بین ظروف شماره دار است. از این رو، تعداد طرق ممکن برای توزیع m شی متمایز بین n ظرف یکسان، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند برابر است با :

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

این عدد را با $S(m,n)$ نشان می‌دهیم و آن را یک عدد استرلینگ نوع دوم می‌نامند.

اگر $|B|=n$ ، $|A|=m\ge n$ آنگاه $S(m,n)$ ،!n تابع پوشا از A روی B وجود دارد.

اعداد استرلینگ را می‌توان با کمک جدول زیر نیز به دست آورد.

**S(m, n)**

| m \ n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | | | | | | | |
| ۲ | ۱ | ۱ | | | | | | |
| ۳ | ۱ | ۳ | ۱ | | | | | |
| ۴ | ۱ | ۷ | ۶ | ۱ | | | | |
| ۵ | ۱ | ۱۵ | ۲۵ | ۱۰ | ۱ | | | |
| ۶ | ۱ | ۳۱ | ۹۰ | ۶۵ | ۱۵ | ۱ | | |
| ۷ | ۱ | ۶۳ | ۳۰۱ | ۳۵۰ | ۱۴۰ | ۲۱ | ۱ | |
| ۸ | ۱ | ۱۲۷ | ۹۶۶ | ۱۷۰۱ | ۱۰۵۰ | ۲۶۶ | ۲۸ | ۱ |

هرگاه $n=1$ باشد مقدار $S(m,1)=1$ خواهد بود.

هرگاه $n=m$ باشد در آن صورت $S(m,n)=1$ خواهد بود.

برای به دست آوردن بقیه اعداد جدول نیز کافی است روال جدول بالا پیروی کنید.

به عنوان مثال:

$$S(7+1,3)=966=63+3(301)=S(7,2)+3S(7,3)$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

## نظریه گروه‌ها ــ ترتیب جزئی ولاتیس

ـ **تعریف:** هرگاه G یک مجموعه ناتهی باشد گوییم K یک عمل دو دویی روی G است هرگاه $G\times G\to G$ (یک تابع تام باشد) در این صورت $(G,*)$ را یک ساختار جبری می‌نامیم و گوییم G تحت عمل $*$ بسته است.

- ✓ **نکته** : اعداد طبیعی $(\mathbb{N},+)$ یک ساختار جبری است.
- ✓ **نکته** : اگر $M_n(R)$ را تمام ماتریس‌های $n\times n$ با درایه‌های حقیقی در نظر بگیریم

$(M_n(R),\times)$ یک سیستم جبری است

$\times$: ضرب ماتریس

- ✓ **نکته:** گوییم $(G,*)$ یک نیم گروه است هرگاه $*$ یک عمل دو تایی روی G باشد و $*$ روی G شرکت پذیر باشد.

**مثال:** $(\mathbb{Z},-)$ **یک سیستم جبری است.**

**مثال:** $(\mathbb{N},+)$ **یک سیستم جبری است.**

- ✓ **نکته:** هر نیم گروه یک سیستم جبری است.

ـ گوئیم $(G,*)$ یک تکوار است هرگاه دارای 2 خاصیت زیر باشند:

۱ـ $(G,*)$ یک سیستم جبری، شرکت پذیر باشد.

۲ـ عمل $*$ روی G دارای عضو خنثی باشد.

**مثال:** $(\mathbb{Z},+)$ **یک تکوار است.**

گوئیم $(G,*)$ یک گروه است هرگاه :

۱ـ $*$ یک عمل دو تایی روی G باشد (تحت عمل $*$ بسته باشد)

۲ـ $*$ روی G شرکت پذیر باشد.

۳ـ $*$ دارای عضو خنثی باشد.

۴ـ هر عضو $a\in G$ دارای عضو وارون باشد.

**مثال:** $(\mathbb{Z},+)$ **یک گروه است ــ** $(Q,+)$ **یک گروه است ــ** $(\mathbb{Z},\times)$ **یک گروه نیست ــ** $(Q,\times)$ **یک گروه نیست.**

- گروه $(G,*)$ را آبلی گویند هرگاه: $a*b=b*a \quad \forall a,b\in G$

**مثال:** $(\mathbb{Z},+)$ **گروه آبلی است.**

- ✓ **نکته:** در هر تکوار عضو خنثی منحصر به فرد است.
- ✓ **نکته:** در هر گروه وارون هر عضو منحصر به فرد است.

**یادداشت:**

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

ـ رابطهٔ A را روی مجموعه ناتهی A پیش ترتیب گوییم هرگاه R دارای دو خاصیت انعکاسی و تعدی باشد.

ـ هرگاه R یک رابطهٔ پیش ترتیب روی مجموعه ناتهی A باشد عضو $a \in A$ را عضو max مجموعه A گویند هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x R a$

ـ هرگاه R یک رابطه پیش ترتیب روی مجموعه ناتهی A باشد عضو $b \in A$ را عضو Min مجموعه A گویند هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $b R x$

ـ رابطه R روی مجموعه A را ترتیب جزئی گویند هرگاه دارای سه خاصیت انعکاسی، پاد تقارن، تعدی باشد.

توجه: خاصیت پاد تقارنی سبب می‌شود که عناصر ماکزیمم و مینیمم در صورت وجود منحصر به فرد شوند ولی همچنان عناصر ماکزیمال و مینیمال می‌توانند در صورت وجود یکتا نباشند.

ـ هرگاه $(A,\le)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد گوییم عضو $a \in A$ یک کران بالایی برای B هایی که $\phi \ne B \subseteq A$ است در صورتی که:

$\forall b \in B \quad b \le a$

همچنین عضو $c \in A$ را یک کران پائینی برای $B \subseteq A \ne \phi$ گوییم هرگاه

$\forall b \in B \quad c \le a$

ـ کوچکترین کران بالایی $(LUB)$ را این گونه تعریف می‌کنیم:

هرگاه $(A,R)$ یک مجموعه جزئی باشد گوییم $a \in A$ کوچکترین کران بالایی B است و می‌نویسیم $a = \sup(A)$ در صورتی که دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ـ a یک کران بالایی B باشد.

۲ـ a بین کلیه کران‌های بالایی B از همه کوچکتر باشد $\exists c \in A \quad \forall x \in B \quad x \le c \Rightarrow a \le c$

- بزرگترین کران پایین (GLB) را اینگونه تعریف می‌کنیم.

هرگاه $(A,\le)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد گوییم عنصر $a \in A$ بزرگترین کران پایین $\phi \ne B \subseteq A$ است می‌نویسیم $a = \inf(B)$ هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

۱ـ a یک کران پایین B باشد.

۲ـ a بین کلیه کران‌های پایینی B از همه بزرگتر باشد.

$\exists c \in A \quad \forall x \in B \quad c \le x \;\Rightarrow\; c \le a$ (۱)

- ✓ **نکته:** Sup و inf در صورت وجود یکتا هستند
- ✓ **نکته:** اگر یک زیرمجموعه مرتب جزیی دارای Max باشد عضو sup برای آن زیر مجموعه محسوب می‌گردد، همچنین عضو ماکسیمال آن زیر مجموعه نیز محسوب می‌شود یعنی:

$\sup = \max$

ـ گوییم رابطه R روی مجموعه ناتهی A رابطه ترتیب کلی است هرگاه R یک رابطه ترتیب جزئی بوده و برای هر $y \in A$ و x داشته باشیم:

$x = y$ یا $x R y$ یا $y R x$

به عبارت دیگر هر دو، دو عضو از A نسبت به رابطه R قابل مقایسه باشند، در این صورت زوج $(A,R)$ را مجموعه مرتب کلی می‌نامیم.

**یادداشت:**

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

- ✓ **نکته:** در مجموعه‌های مرتب کلی مفهوم عضو ماکسیمال و ماکسیمم بر هم منطبق است. (این نکته در مورد عناصر مینیمال و مینیمم نیز برقرار است).
- ✓ **نکته:** اگر $(A,R)$ یک مجموعه مرتب جزئی / کلی باشد و $B\subseteq A$ آنگاه $(B,R\cap(B\times B))$ یک مجموعه جزیی / کلی خواهد بود.

ـ زنجیر ماکسیمال : زنجیری ماکسیمال نامیده می‌شود که به ابتدا، انتها یا میان عناصر آن نتوان عنصری اضافه کرد.

**تست: به ازای $A\neq 0$ فرض کنیم $(A,R)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد و فرض کنیم $0\neq B\subseteq A$. رابطه $R=(B\times B)\cap R$ را در نظر می‌گیریم. اگر $(B,R)$ تماماً مرتب باشد، $(B,R)$ را زنجیری در $(A,R)$ می‌نامیم. در حالتی که $B$ متناهی باشد، می‌توانیم عنصرهای $B$ را به صورت $b_1Rb_2\,Rb_3R\ \dots\ Rb_{n-1}\,Rb_n$ مرتب کنیم. در این صورت، می‌گوییم $B$ زنجیری به طول $n$ است. زنجیری (به طول $n$) را ماکسیمال می‌نامیم هرگاه عنصری مانند $a\in A$ وجود نداشته باشد به طوری که $a\notin\{b_1,b_2,b_3,\dots b_n\}$ و $b_nRa\,,aRb_1$ یا $b_iRaRb_{i+1}$ به ازای اندیسی مانند $1\le i\le n-1$. اگر $u=\{1,2,\dots,n\}$ مجموعه جزئاً مرتب $(p(u),\subseteq)$ چند زنجیر ماکسیمال دارد؟ ( $p(u)$ مجموعه همه زیر مجموعه‌های $u$ است) (1T ـ سراسری ۸۷)**

۱) $n!$ ۲) $n^2$ ۳) $n-1$ ۴) $\binom{2n-1}{n}$

**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

$\{\ \}\subseteq\{1\}\subseteq\{1,2\}\subseteq\dots\ \Rightarrow\ n!$

ـ **تعریف شبکه (لاتیس):** یک شبکه یک مجموعه مرتب جزیی است که برای آن هر دو عضو آن عناصر sup و inf وجود داشته باشد. به عبارت دیگر $(L,\le)$ شبکه است هرگاه مرتب جزئی بوده به طوری که برای هر دو عضو آن داشته باشیم:

$$\begin{cases}a\wedge b\in L\\ a\vee b\in L\end{cases}$$

ـ **هاس دیاگرام :** برای هر مجموعه مرتب جزئی متناهی می‌توان یک گراف ترسیم کرد. به طوری که رئوس این گراف عناصر مرتب جزیی بوده و در صورتی که a , b دو عضو این مجموعه مرتب جزئی باشند، باید $a\le b$ و هیچ c از این مجموعه مرتب عبارت $a\le c\ ,\ c\le b$ را نداشته باشد، در این صورت یک یال جهت دار از a به c رسم می‌کنیم.

- ✓ **نکته:** برای نمایش هر شبکه متناهی می‌توان از نمودار هاس استفاده کرد ولی باید توجه کرد که نمودار هاس یک شبکه بایدحتماً دارای خواص زیر باشند:

هر عنصر دقیقاً یک sup و یک Inf داشته باشد همچنین باید دارای عضو کمینه (0) و پیشینه (1) باشد.

**یادداشت:**

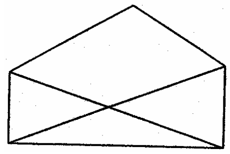
.................................................................................................

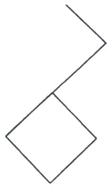
.................................................................................................

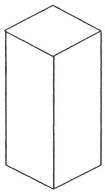
.................................................................................................

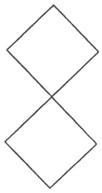
.................................................................................................

**تست: کدام یک از a نمودارها زیر شبکه نمی‌باشد؟**

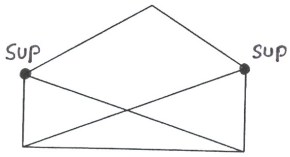
۱)


۲)


۳)


۴)


حل: گزینه ۱ صحیح است.




✓ **نکته:** هرگاه $(L,\leq)$ یک شبکه باشد در این صورت می‌توان دو عمل * و + را به شکل زیر تعریف کرد.

$$a*b=\inf\{a,b\}$$

$$a+b=\sup\{a,b\}$$

- شبکه $(L,+,*)$ را توزیع پذیر گویند هرگاه برابر هر سه عنصر $a,b,c$ داشته باشیم:

$$a,b,c\in L:\begin{cases} \text{I)}\, a*(b+c)=a*b+a*c \\ \text{II)}\, a+b*c=(a+b)*(a+c) \end{cases}$$

اگر هر کدام از این دو شرط بالا برقرار باشد برای توزیع پذیری کافی است.

ـ گوئیم $\phi$ یک همریختی از شبکه $(L,+,*)$ به شبکه $(L',+',*')$ است درصورتی که:

$L\to L'$ هرگاه $\phi$ تابعی تام از L به $L'$ بوده و برای هر $a,b\in L$ داشته باشیم.

$$\phi(a*b)=\phi(a)*'\phi(b)$$

$$\phi(a+b)=\phi(a)+'\phi(b)$$

ـ اگر $\phi$ یک به یک و پوشا باشد، $\phi$ را یک ایزوفیسم (یک ریختی) گوییم.

ـ اگر $\phi$ یک به یک باشد، آن را مونومورفیسم (تک ریختی) گوییم.

ـ اگر $\phi$ پوشا باشد آن را اپیمورفیسم (برون ریختی) گوییم.

ـ زیرمجموعه‌ای از یک شبکه، که با رابطه ترتیب جزیی القاء شده از شبکه اصلی خود، یک شبکه باشد را زیر شبکه گوییم.

ـ **لاتیس کراندار:** لاتیس $(L,+,*)$ را کراندار نامیم هرگاه دارای دو عضو 0 و 1 بوده به طوری که برای $0\leq a \quad \forall a\in L$ و برای $\forall a\in L \quad L\leq 1$

$$\exists 0,1 \quad \forall a\in L \quad 0\leq a\leq 1$$

✓ **نکته:** اعداد طبیعی یک لاتیس است که کراندار نیست.

**یادداشت:**

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

.......................................................................................................

ـ عضو $a \in L$ از شبکه کراندار L را وارون پذیر نامیم هرگاه عضوی مانند a چنان موجود باشد که

$$a + a' = 1 \qquad a * a' = 0$$

✓ **نکته:** اگر یک لاتیس توزیع پذیر باشد در این صورت هر عضو وارون پذیر دقیقاً دارای یک وارون است.

ـ لاتیس L را کامل گویند هرگاه هر زیر مجموعه ناتهی از L دارای sup و inf باشد.

✓ **نکته:** در صورتی که لاتیس متناهی باشد حتماً کامل است.

ـ لاتیس L را متمم پذیر نامند هرگاه تمام عناصر آن وارون داشته باشند.

✓ **نکته:** یک جبر بول، یک لاتیس کراندار توزیع پذیر، متمم پذیر کامل است.

✓ **نکته:** هرگاه n عدد اول باشد $(D_{n,1})$ یک مجموعه مرتب کلی است.

✓ **نکته:** هرگاه n توانی از یک عدد اول باشد $(D_{n,1})$ یک مجموعه مرتب کلی است.

✓ **نکته:** هرگاه $n = p_1 p_2 \dots p_k$ به طوری که $p_i$ها دو به دو متمایز باشند $(D_{n,1})$ یک جبر بول است.

**تست: در شبکه $<P, \leq>$ اگر برای $a, b, c \in P$ داشته باشیم $c \leq b$ , $c \leq a$ کدام یک از گفته‌های زیر صحیح است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۵)**

۱) $c \leq a * b$ ۲) $a * b \leq c$ ۳) $c \leq a \oplus b$ ۴) $a \oplus b \leq c$

**حل:**

چون $\begin{cases} c \leq a \\ c \leq b \end{cases}$ پس داریم: $c \leq a \wedge b$ و چون $a \wedge b \leq a \vee b$ پس داریم:

$$\begin{cases} c \leq a \oplus b \\ c < a * b \end{cases} \leftarrow \ c \leq a \vee b$$

گزینه ۱ و ۳ صحیح می‌باشد.

**تست: اگر $A = \{a, b, c\}$ و $p(A)$ مجموعه قوه A باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر یک زیر شبکه $\langle p(A), \subseteq \rangle$ نیست؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۶)**

۱) $\langle \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}, \subseteq \rangle$

۲) $\langle \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \subseteq \rangle$

۳) $\langle \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}, \subseteq \rangle$

۴) $\langle \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}, \subseteq \rangle$

**حل:** گزینه ۱ صحیح است.

**یادداشت:**

...........................................................................................

...........................................................................................

...........................................................................................

...........................................................................................

**تست: می‌دانیم که مجموعه تمامی مقسوم علیه‌های عدد 210 که با $D_{210}$ نمایش داده می‌شود همراه با رابطه عـاد کردن (شمردن) یک جبر بول است، تعداد زیر جبرهای حداقل دو عضوی آن کدام اسـت؟ (مهندسـی کـامپیوتر ـ سراسری ۸۸)**

۱) 15 ۲) 14 ۳) 13 ۴) 7

گزینه ۱ صحیح است.

به طور کلی اگر عدد صحیح و مثبت n را بتوان به صورت حاصل ضرب تعدادی عامل اول متمایز نوشت در این صورت $D_n$ به همراه رابطه عاد کردن یک زیر جبر بول از $D_{210}$ باحداقل 2 عضو محسوب می‌شود:

$D_2, D_3, D_5, D_7, D_6, D_{10}, D_{14}, D_{15}, D_{21}, D_{30}, D_{35}, D_{42}, D_{70}, D_{105}$

به این لیست باید 1 و 210 را نیز اضافه کنیم در نتیجه تعداد زیر جبر بول $D_{210}$ با حداقل 2 عضو برابر 15 است.

**یادداشت:**

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

........................................................................................................

## گراف

- یک گراف را به صورت $G=\langle V,E\rangle$ نمایش می‌دهیم.

✓ **نکته** : در گراف به مجموعه نقاط، مجموعه رئوس گویند و آن را با $V$ نمایش می‌دهیم. مجموعه یال‌ها را نیز با E نمایش می‌دهیم.

ـ به طور کلی یک یال یک پاره خط است که می‌تواند جهت دار یا غیر جهت دار باشد. اگر تمام یال‌های گراف جهتدار باشد به آن "گراف جهت دار" گویند. در صورتی که همه یال‌ها صرفاً پاره خط باشند به آن "گراف غیر جهت دار" گویند.

ـ **گراف ساده :** به گرافی بین هر دو رأس آن حداکثر یک پاره خط یا یک پیکان جهت دار صرفاً در یک جهت وجود داشته باشد و همچنین یالی ازیک راس به همان راس نیامده باشد (طوقه نداشته باشد) گراف ساده گویند.

ـ **درجه یک رأس:** درجه رأس V از گراف غیر جهت دار G را مجموعه یال‌های گذرنده از این رأس می‌نامیم. هنگام محاسبه درجه یک رأس طوقه را 2 بار محاسبه می‌کنیم.

**نکته** : هرگاه تعداد یال‌های گراف G را با e نشان دهیم و تعداد رئوس گراف را که مرتبه گراف است با n یا $|V|$ نمایش دهیم در آن صورت داریم:

$$\sum \deg V = 2e$$

✓ **نکته** : در هر گراف غیر جهت دار تعداد رئوس فرد، زوج است.

✓ **نکته** : هرگاه G یک گراف غیر جهت دار ساده باشد آنگاه : $0 \le e \le \binom{n}{2}$

- به گراف غیر جهت دار ساده G کامل گویند هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن دقیقاً یک یال وجود داشته باشد.

- گراف کامل با n رأس را با $K_n$ نمایش می‌دهیم ، تعداد یال‌های گراف کامل برابر با $\frac{n(n-1)}{2}$ است.

ـ گراف غیر جهت دار G را منتظم گویند هرگاه درجه هر رأس آن r باشد.

✓ **نکته** : در هر گراف r– منتظم داریم: $e=\frac{1}{2}nr$

✓ **نکته** : هیچ گراف فرد منتظم از مرتبه عدد فرد وجود ندارد.

ـ هرگاه G یک گراف غیر جهت دار باشد، دنبالهٔ صعودی و متناهی تشکیل شده از درجات رئوس گراف را دنباله گرافی G می‌نامیم

ـ **گراف دو بخشی:** گراف $G\langle V,E\rangle$ را دو بخشی گوییم اگر مجموعه رئوس V را بتوان به دو مجموعه جدا از هم $V_1 , V_2$ چنان افراز کرد که هر یال در گراف G یک رأسش در $V_1$ و رأس دیگری در $V_2$ باشد.

✓ **نکته** : گراف دو قسمتی $K_{m,n}$ دارای $m+n$ راس و $m\times n$ یال است و درجه رئوس آن m یا n است.

**یادداشت:**

..............................................................................................................................

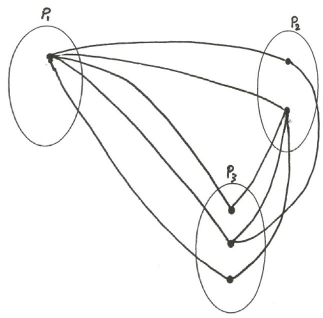
..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

..............................................................................................................................

**ـ گراف متمم:** هرگاه $G=\langle V,E\rangle$ یک گراف ساده و غیر جهت دار باشد ، مکمل گراف G را با $\overline{G}$ نمایش داده و گرافی است که مجموعه رئوس آن دقیقاً همان مجموعه رئوس گراف G را دارا می‌باشد با این اختلاف که بین دو رأس $U,V$ در گراف G یالی وجود نداشته باشد.

- ✓ **نکته :** متمم گراف کامل $K_{n,m}$ دارای $\binom{n}{2}+\binom{m}{2}=\binom{n+m}{2}-mn$ یال است.
- ✓ **نکته :**تعداد یال‌های یک گراف n بخشی کامل که بخش‌های آن به ترتیب شامل $P_i$ رأس باشد برابر با:




$$P_1P_2+P_1P_3+\ldots+P_1P_n+P_2P_3+\ldots+P_2P_n+\ldots+P_{n-1}P_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}P_iP_j$$

## دور همیلتونی

هرگاه $G=\langle V,E\rangle$ یک گراف غیر جهت دار باشد یک دور همیلتونی در گراف G دور است که از تمام رئوس گراف G بگذرد.

**نکات مهم:**

- ✓ تعداد دورهای همیلتونی در گراف کامل $K_n$ برابربا $\frac{(n-1)!}{2}$ است.
- ✓ گراف دو بخشی کامل $K_{n,m}$ دارای دور همیلتونی است اگر و فقط اگر $n=m$ باشد.
- ✓ تعداد دورهای همیلتونی در گراف کامل دو بخشی $K_{n,n}$ برابر با $\frac{n!(n-1)!}{2}$ است.
- ✓ تعداد دورها در گراف کامل $K_n$ برابر با $\sum_{p=3}^{n}\binom{n}{p}\frac{(p-1)!}{2}$
- ✓ گراف غیر جهت دار G را همبند نامیم هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن یک مسیر وجود داشته باشد.

## – مدار اویلری

به مداری که از تمام یال‌های گراف بگذرد مدار اویلری گویند. به عبارت دیگر گذر بسته‌ای که شامل همه یال‌های گراف باشد را مدار اویلری نامند.

- ✓ **نکته:** شرط لازم و کافی برای آن که گرافی همبند اویلری باشد آن است که درجه هر رأس آن زوج باشد.

**یادداشت:**

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

................................................................................................................................

ـ **مسیر همیلتونی،** مسیری است که از تمام رئوس گراف بگذرد.

✓ **نکته:** هرگاه $G\langle V,E\rangle$ یک گراف غیر جهت دار باشد آنگاه

۱ـ شرط کافی برای آن که G دارای مسیر همیلتونی باشد آن است که :

* n تعداد رئوس می‌باشد

$$\forall u,v\in V \quad \deg u+\deg v\geq n-1$$

۲ـ شرط کافی برای این که دور همیلتونی وجود داشته باشد

$$\forall u,v\in V \quad \deg u+\deg v\geq n$$

ـ **گذر اویلری:** گذری است که از تمام یال‌های گراف بگذرد.

✓ **نکته:** شرط لازم و کافی برای آن که G دارای گذر اویلری باشد (G: گراف همبند است) آن است که درجه رئوس زوج بوده و فقط دو رأس از درجه فرد داشته باشد (رأس شروع و پایان).

✓ **نکته:** به گرافی که $e>3V-6$ باشد گراف غیرمسطح گویند.

ـ گراف غیر جهت دار G را مسطح گویند هرگاه یال‌های گراف G را بتوان طوری ترسیم کرد که هیچ دو یالی در صفحه به جز در رئوس درجای دیگری متقاطع نباشند.

## تعریف یکریختی (ایزومورفیسم)

گوییم تابع $\varphi:G\to G'$ که $G=\langle V,E\rangle$ و $G'=\langle V',E'\rangle$ دو گراف است، یک ریختی است هرگاه :

۱ـ $\varphi:V\to V'$ یک تابع تام یک به یک باشد.

۲ـ اگر $\{u,v\}\in E \iff \{\varphi(u),\varphi(v)\}\in E'$

**تعریف زیر گراف:** هرگاه $G=\langle V,E\rangle$ گوییم $H=\langle V_1,E_1\rangle$ یک زیر گراف از $G'$ است و می‌نویسیم:

$$E_1\subseteq E \quad , \quad \phi\neq V_1\subset V$$

**تعریف زیرگراف فراگیر پوشا:** هرگاه مجموعه رئوس زیر گراف H از گراف G دقیقاً برابر مجموعه رئوس گراف G باشد گوییم، H یک زیر گراف فراگیر از G است.

✓ **نکته:** تعداد زیر گراف‌های پوشای گراف کامل $K_n$ که درخت باشند برابر است با $n^{n-2}$

✓ **نکته:** اگر $G=\langle V,E\rangle$ گرافی بدون حلقه و همبند باشد $|E|>\frac{|V|^2}{4}$ ، آنگاه G دو بخشی نیست.

## رنگ آمیزی گراف

هرگاه G یک گراف غیر جهت دار باشد منظور از رنگ آمیزی گراف، حداقل تعداد رنگ‌های به کار برده شده برای گراف G است به طوری که دو رأس مجاور هم رنگ نباشند.

**یادداشت:**

........................................................................................................................

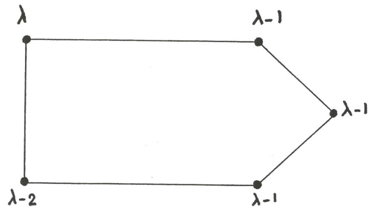
........................................................................................................................

........................................................................................................................

........................................................................................................................

### چند جمله‌ای رنگی

هرگاه G یک گراف غیر جهت دار ساده باشد گوییم $P(G,\lambda)$ چند جمله‌ای رنگی G است هرگاه $P(G,\lambda)$ تعداد حالات رنگ آمیزی گراف با $\lambda$ رنگ باشد.




$$P(G_5,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^3(\lambda-2)$$

## ویژگی‌های چند جمله‌ای فامی (رنگی)

۱ـ ضریب پیش‌رو چند جمله‌ای فامی همواره 1 است. (ضریب بزرگتری درجه $\lambda$)

۲ـ مقدار ثابت چند جمله‌ای فامی همواره 0 است.

۳ـ ریشه‌های چند جمله‌ای فامی به ترتیب از ...,1,2,3 است. (نمی‌تواند ریشه 1 و 3 داشته باشد ولی 2 نداشته باشد).

۴ـ مجموعه ضرایب باید 0 باشد زیرا 1 ریشه است.

**تست: کدام یک چند جمله‌ای کروماتیک(فامی) است؟**

۱) $3\lambda^3+4\lambda^4+\lambda$

۲) $\lambda^4-5\lambda^3+7\lambda^2-6\lambda+3$

۳) $\lambda^4-3\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda$

۴) $\lambda^4-5\lambda^3+8\lambda^2-4\lambda$

حل: گزینه ۴ صحیح است.

مجموع ضرایب $=1-5+8-4=0$

### نکات بسیار مهم :

✓ چند جمله‌ای رنگی گراف $K_n$ و $K_{n,n}$ برابر است با :

$$P(K_n,\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)=(\lambda)_n$$

$$P(K_{n,n},\lambda)=\lambda(\lambda-1)^{2n-1}$$

✓ برای چند جمله‌ای‌های رنگی اگر $G=(V,E)$ گرافی همبند باشد و $e\in E$ آنگاه

$$P(G_e,\lambda)=P(G,\lambda)+P(G'_e,\lambda)$$

✓ در صورتی که G گراف بدون جهت با زیر گراف‌های $G_2,G_1$ باشد، اگر $G=G_1\bigcup G_2$ و در صورتی که به ازای عددی مانند $n\in\mathbb{Z}^+$ داشته باشیم $G_1\bigcap G_2=K_n$ در آن صورت داریم:

$$P(G,\lambda)=\frac{[P(G_1,\lambda).P(G_2,\lambda)]}{\lambda^{(n)}}$$

**یادداشت:**

............................................................................................................................................

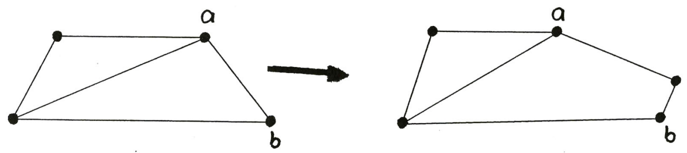
............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

- ✓ در صورتی که در گراف $G=\langle V,E\rangle$ اگر $|V|=n$ باشد آنگاه ضریب $\lambda^{n-1}$ در $P(G,\lambda)$ قرینه عدد $|E|$ است.
- ✓ اگر G مدار اویلری داشته باشد آنگاه $L(G)$ هم مدار اویلری دارد و هم دور همیلتونی.
- ✓ اگر G دور همیلتونی داشته باشد آنگاه $L(G)$ نیز دور همیلتونی دارد.
- ✓ گراف G همبند یک طرفه است هرگاه بین هر دو رأس آن یک مسیر یک طرفه موجود باشد.
- ✓ گراف G را همبند قوی می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن یک مسیر رفت و یک مسیر برگشت موجود باشد.
- ✓ در صورتی که G گرافی بدون جهت با n رأس باشد اگر G با مکمل خود، $\overline{G}$ یکریخت باشد آنگاه G دارای $\frac{n(n-1)}{4}$ یال است.
- ✓ تعداد مسیرهای مقدماتی به طول m , $1\le m\le n-1$ درگراف $K_n$ بین دو رأس مشخص برابر با $\frac{(n-2)!}{(n-m-1)!}$ است.
- ✓ در گراف دو بخشی که تعداد رئوس دو بخش مساوی نباشد دور همیلتونی وجود ندارد.
- ✓ تعداد دورهای همیلتونی $K_n$ برابر با $\frac{(n-1)!}{2}$
- ✓ تعداد دورهای همیلتونی که هیچ یال مشترکی ندارند برابر با $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ است.
- ✓ در صورتی که جمع درایه‌های قطر اصلی $A^3$ ماتریس مجاورتی را بر 6 تقسیم کنیم تعداد مثلث‌های گراف به دست می‌آید.
- ✓ اگر $G=\langle V,E\rangle$ گراف بدون جهت بی طوقه باشد که در آن $|V|=n\ge 3$ و $|E|\ge\binom{n-1}{2}+2$ آنگاه G دور همیلتونی دارد.

ـ **تعریف زیر بخش مقدماتی :** یک زیربخش مقدماتی از گراف غیر جهت دار G گرافی است که از حذف یک یال و اضافه کردن یک رأس و همچنین دو یال، به طوری که این یال‌ها رأس مذکور را به دو سر یال حذف شده متصل می‌کند.




ـ دو گراف را همسان ریخت گویند هرگاه آن دو گراف یا یک ریخت باشند یا این که با تعداد متناهی دفعه از عمل زیر بخش مقدماتی از یک گراف دیگر به دست آمده باشند.

ـ گراف G مسطح است اگر و تنها اگر شامل زیر گرافی همسان ریخت با $K_{3,3}$ یا $K_5$ نباشد.

**یادداشت:**

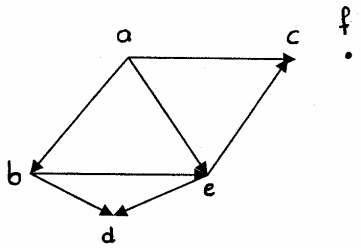
............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

............................................................................................................................................

**تست: گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر یک پایگاه رأس برای این گراف می‌باشـد؟ (مهندسی کامپیوتر سراسری ۸۵)**




۱) $\{a,e\}$

۲) $\{a,f\}$

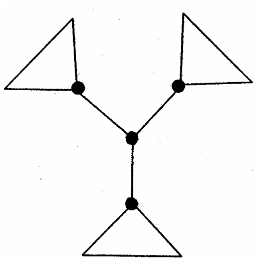
۳) $\{a,e,f\}$

۴) $\{a,b,f\}$

حل: گزینه ۲ صحیح است.

پایگاه رأس ،رئوسی را شامل می‌شود که ورودی ندارند و خروجی دارند که فقط $\{a,f\}$ شامل این قضیه می‌باشد.

**تست: به چند طریق می‌توان رأس‌های گراف مقابل را با $3$ رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم رنگ نباشند. (مهندسی کامپیوتر ــ سراسری ۸۶)**



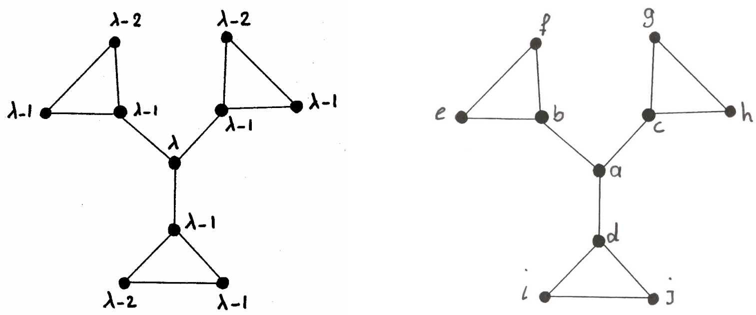
۱) $3\times2^3$

۲) $3\times2^6$

۳) $3^3$

۴) $2^6$

حل: گزینه ۳ صحیح است.




با توجه به شکل رأس a را با $\lambda$ رنگ مختلف می‌توان رنگ آمیزی کرد. پس از رنگ کردن a با یک رنگ خاص هر یک از رئوس مجاور a یعنی سه راس d , c , b به $\lambda-1$ طریق قابل رنگ‌آمیزی است چون نباید با a هم رنگ باشند همچنین هر یک از سه رأس j , h , e نیز به $\lambda-1$ طریق قابل رنگ آمیزی است زیرا یکی از رئوس مجاور آن‌ها رنگ شده است و نباید با آن هم رنگ باشند.

سه رأس باقیمانده دیگر نیز هر یک به $\lambda-2$ طریق قابل رنگ آمیزی است.

**یادداشت:**

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

بنابراین چند جمله‌ای رنگی گراف داده شده یعنی تعداد روش‌های ممکن برای رنگ آمیزی گراف داده شده با $\lambda$ رنگ به طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم رنگ نباشند برابر است با:

$$P(G,\lambda)=\lambda(\lambda-1)^6(\lambda-2)^3$$

$$P(G,3)=3(3-1)^6(3-2)^3=3\times 2^6$$

**تست: گراف بدون جهت بی‌طوقه و $n$ بخشی کامل $G(V,E)$ را در نظر بگیرید اگر تعداد رأس‌های هر بخش $i$ را با $P_i$ نمایش دهیم تعداد یال‌های $G,\overline{G}$ کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۸)**

۱) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}P_iP_j \ , \ \sum_{i=1}^{n}\binom{P_i}{2}$

۲) $\sum_{i=1}^{n}P_i^2 \ , \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}P_iP_j$

۳) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\binom{P_i}{2}\binom{P_j}{2} \ , \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}P_iP_j$

۴) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}P_i\frac{P_j}{2} \ , \ \sum_{i=1}^{n}P_i^2$

حل: گزینه ۱ صحیح است.

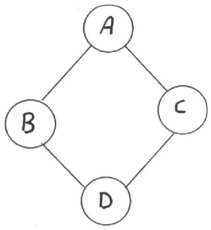
طبق مطالب گفته شده در متن.

**تست: اگر گراف $G$ در واقع دوری به طول 4 باشد به چند روش مختلف می‌توان رئوس $G$ را با استفاده از حداکثر $\lambda$ رنگ متفاوت رنگ آمیزی کرد به گونه ای که هیچ دو رأس مجاور هم رنگ نباشد؟**

**(مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۸۹)**

۱) $\lambda^3-4\lambda^2+6\lambda-1$ ۲) $\lambda^3+4\lambda^2-6\lambda+1$ ۳) $\lambda^4+4\lambda^3-6\lambda^2+3\lambda$ ۴) $\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda$

حل: گزینه ۴ صحیح است.




برای رنگ آمیزی این گراف می‌توان A و C را با رنگ یکسان یا با دو رنگ متفاوت رنگ کرد.

۱ـ اگر A و C را با رنگ یکسان رنگ کنیم در این صورت برای رنگ کردن C , A به تعداد $\lambda$ رنگ مختلف انتخاب داریم و به ازای هر یک از این رنگ‌ها، هر یک از گروه‌های B و D را می‌توان با $\lambda-1$ رنگ باقیمانده رنگ کنیم، بنابراین:

روش‌های رنگ آمیزی اگر C , A همرنگ باشند. $=\lambda\times(\lambda-1)\times(\lambda-1)$

۲ـ اگر C , A را با دو رنگ متفاوت رنگ کنیم:

ابتدا A را رنگ می‌کنیم برای این کار $\lambda$ انتخاب مختلف داریم. به ازای هریک از رنگ‌های ممکن برای A، گره C می‌تواند با $\lambda-1$ رنگ دیگر رنگ شود و به ازای هر ترکیب رنگی A و C هر کدام از گروه‌های B و D می‌توانند با $\lambda-2$ رنگ باقیمانده رنگ شوند بنابراین تعداد روش‌های رنگ آمیزی اگر C , A با دو رنگ متفاوت رنگ شوند برابر با $\lambda(\lambda-1)\times(\lambda-2)\times(\lambda-2)$ است.

در نتیجه تعداد کل روش‌های رنگ آمیزی ممکن برابر است با :

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-1)+\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2)=\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-3\lambda$$

**یادداشت:**

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................