

تبدیل اسکن

بسیاری از تصاویر دوبعدی و سه بعدی، شامل یک سری اجزای گرافیکی ابتدایی (primitives) مانند نقاط، خطوط، دایره ها و چندضلعی های توپر می باشند.

این بر عهده ی سیستم گرافیکی است تا هر تصویر را از تعریف هندسی اش به مجموعه ای از پیکسل ها که در فضای تصویر می سازد، تبدیل کند.

این تبدیل، تبدیل اسکن (Scan Conversion) نام دارد.

تبدیل اسکن نقطه

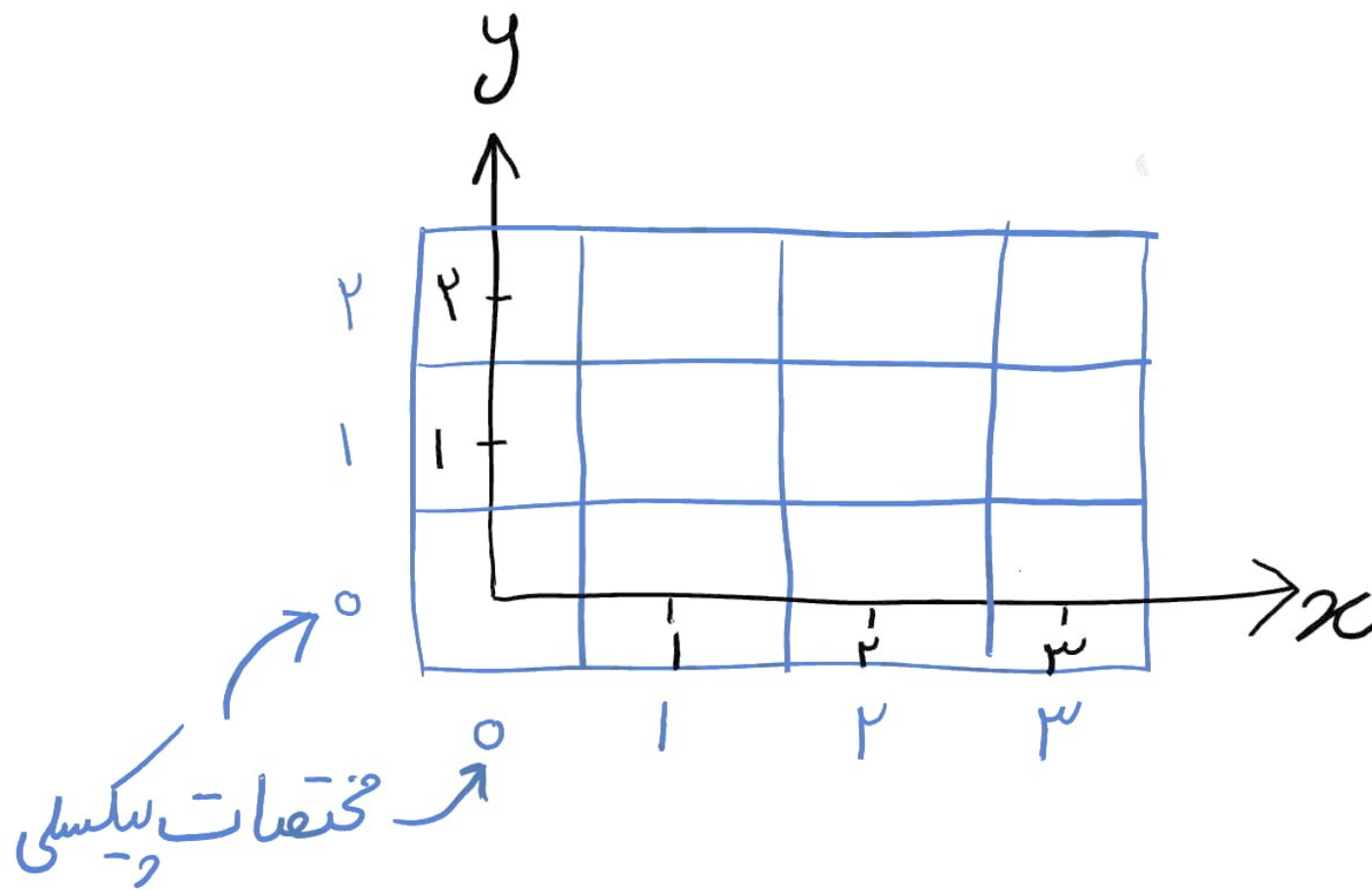
هر نقطه‌ی حقیقی ریاضی (x, y) در صفحه‌ی تصویر به پیکسل موقعیت (x', y') تبدیل می‌شود که x' و y' به ترتیب قسمت‌های صحیح X و Y هستند.

تابع تبدیل را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که مبدأ سیستم مختصات پیوسته (x, y) به مرکز پیکسل $(0, 0)$ نگاشته شود. یعنی:

$$\text{Floor}(x + 0.5) = x'$$

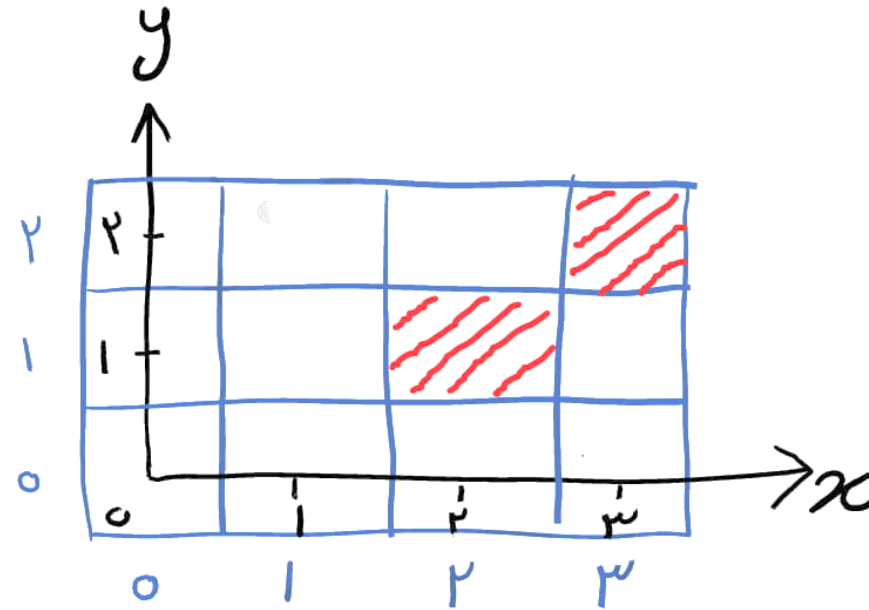
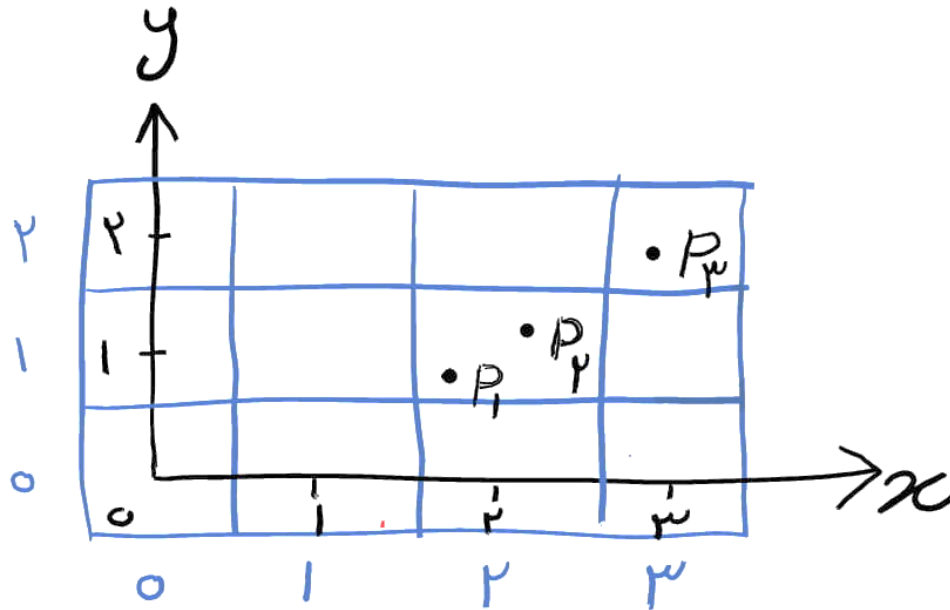
$$\text{Floor}(y + 0.5) = y'$$

تبدیل اسکن نقطه



تبدیل اسکن نقطه

مثال:



$$\begin{aligned} P_1 &= (1.7, 0.8) & \Rightarrow & R_1 = (2, 1) \\ P_2 &= (2.2, 1.3) & \Rightarrow & R_1 = (2, 1) \\ P_3 &= (2.8, 1.9) & \Rightarrow & R_1 = (3, 2) \end{aligned}$$

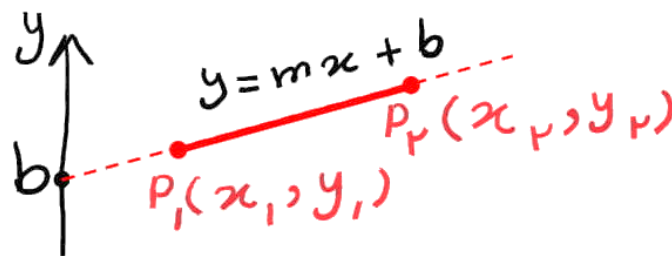
تبدیل اسکن پاره خط

استفاده مستقیم از معادله پاره خط

فرض کنیم $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ نقاط ابتدایی و انتهایی پاره خط باشند که به ترتیب دارای مختصات پیکسلی (x'_1, y'_1) و (x'_2, y'_2) هستند. قرار می دهیم:

$$m = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

$$b = y'_1 - mx'_1$$



نکته: در سه حالت خطوط افقی، عمودی و قطری ($|m| = 1$)، از الگوریتم تبدیل اسکن استفاده نمی شود.

تبدیل اسکن پاره خط

اگر $|m| \leq 1$ باشد برای هر مقدار صحیح x_0 که $x'_1 < x_0 < x'_2$ ، مقدار متناظر y با استفاده از معادله $y = mx + b$ به دست می‌آید.

اگر $|m| > 1$ باشد، برای هر مقدار صحیح y_0 که $y'_1 < y_0 < y'_2$ ، مقدار متناظر x با استفاده از معادله $x = \frac{y-b}{m}$ به دست می‌آید. (m یک عدد حقیقی است).

از نظر ریاضی این اعمال بسیار ساده‌اند، اما در کامپیوتر دو عمل جمع و ضرب را داریم و امکان پایین آمدن سرعت اسکن پاره خط و بوجود آمدن خطا وجود دارد.

تبدیل اسکن پاره خط

استفاده از الگوریتم DDA (Digital Differential Analyzer)

یک الگوریتم افزایشی و تکراری است.

فرض کنید در مرحله ی i ام (x_i, y_i) به دست آمده باشد.

برای محاسبه ی (x_{i+1}, y_{i+1}) بایستی شرط $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ که در آن $y = y_{i+1} - y_i$ و $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ برقرار باشد، یعنی:

$$y_{i+1} = y_i + m\Delta x$$
$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{m}\Delta y$$

تبدیل اسکن پاره خط

با فرض $x = x'_1$ و $y = y'_1$ ، اگر $|m| \leq 1$ فرض می‌کنیم $\Delta x = 1$

در این صورت: $y_{i+1} = y_i + m$

اگر $|m| > 1$ فرض می‌کنیم $\Delta y = 1$

در این صورت: $x_{i+1} = x_i + \frac{1}{m}$

الگوریتم **DDA** به دلیل آنکه در آن عمل ضرب کم می‌شود از روش استفاده‌ی مستقیم از پاره خط سریع‌تر است، اما به دلیل وجود عمل جمع و اینکه m ممکن است یک عدد حقیقی باشد، درصد کارایی آن کم است.

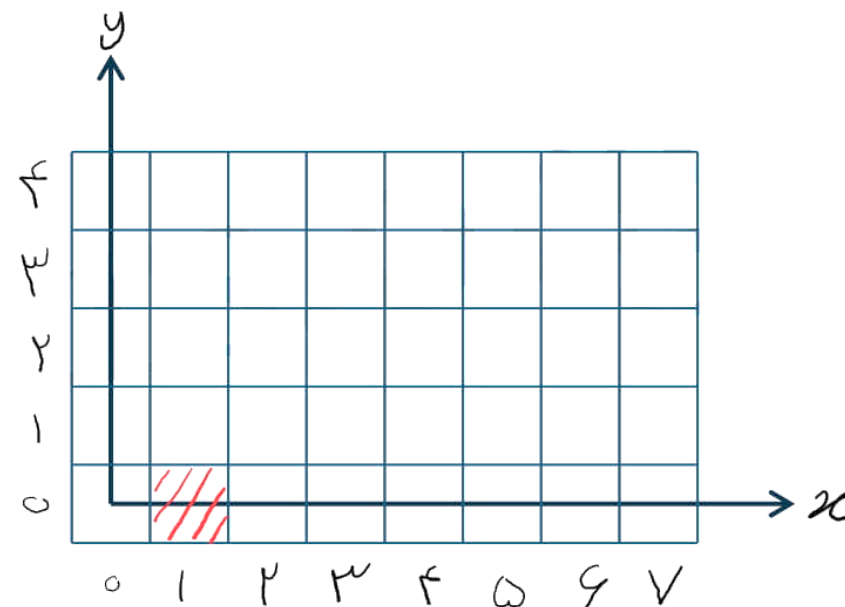
تبدیل اسکن پاره خط

مثال: فرض کنید $P_1 = (1,0)$ و $P_2 = (6,4)$.

با استفاده از الگوریتم DDA پاره خط واصل دو نقطه‌ی P_1 و P_2 را اسکن کنید.

$$P_1 = (1,0) \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 0}{6 - 1} = \frac{4}{5} < 1$$



تبدیل اسکن پاره خط

$$|m| \leq 1 \Rightarrow y_{i+1} = y_i + m, \quad \Delta x = 1$$

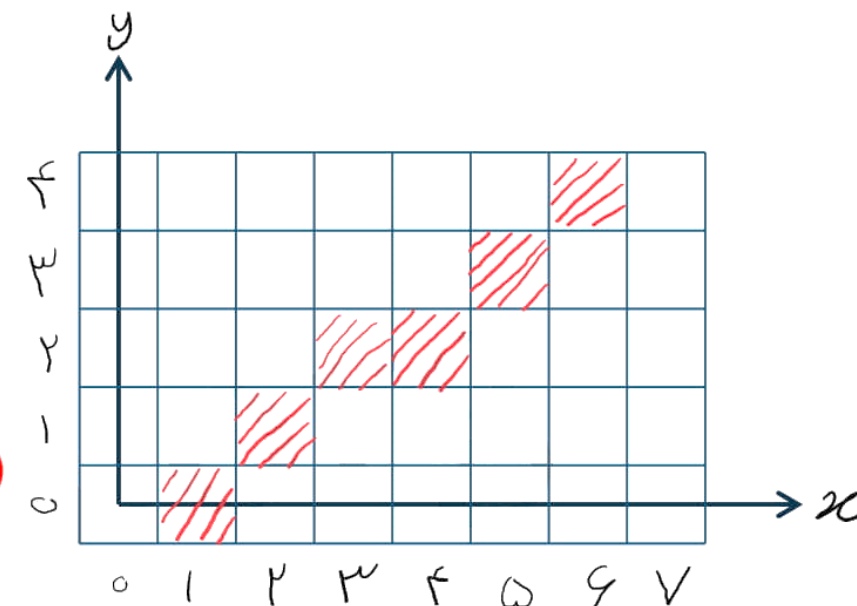
$$y_2 = y_1 + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}, \quad x_2 = x_1 + 1 = 2 \quad \left(2, \frac{4}{5}\right) \rightarrow (2,1)$$

$$y_3 = y_2 + \frac{4}{5} = \frac{8}{5}, \quad x_3 = x_2 + 1 = 3 \quad \left(3, \frac{8}{5}\right) \rightarrow (3,2)$$

$$y_4 = y_3 + \frac{4}{5} = \frac{12}{5}, \quad x_4 = x_3 + 1 = 4 \quad \left(4, \frac{12}{5}\right) \rightarrow (4,2)$$

$$y_5 = y_4 + \frac{4}{5} = \frac{16}{5}, \quad x_5 = x_4 + 1 = 5 \quad \left(5, \frac{16}{5}\right) \rightarrow (5,3)$$

$$y_6 = y_5 + \frac{4}{5} = \frac{20}{5}, \quad x_6 = x_5 + 1 = 6 \quad \left(6, \frac{20}{5}\right) \rightarrow (6,4)$$



تبدیل اسکن پاره خط

استفاده از الگوریتم برسنهام (Bresenham)

این الگوریتم نیز افزایشی و تکراری است که به صورت ریاضی نتایج جدیدی را فقط با جمع و تفریق و ضرب در ۲ ایجاد می‌کند. به همین دلیل مؤثرتر است.

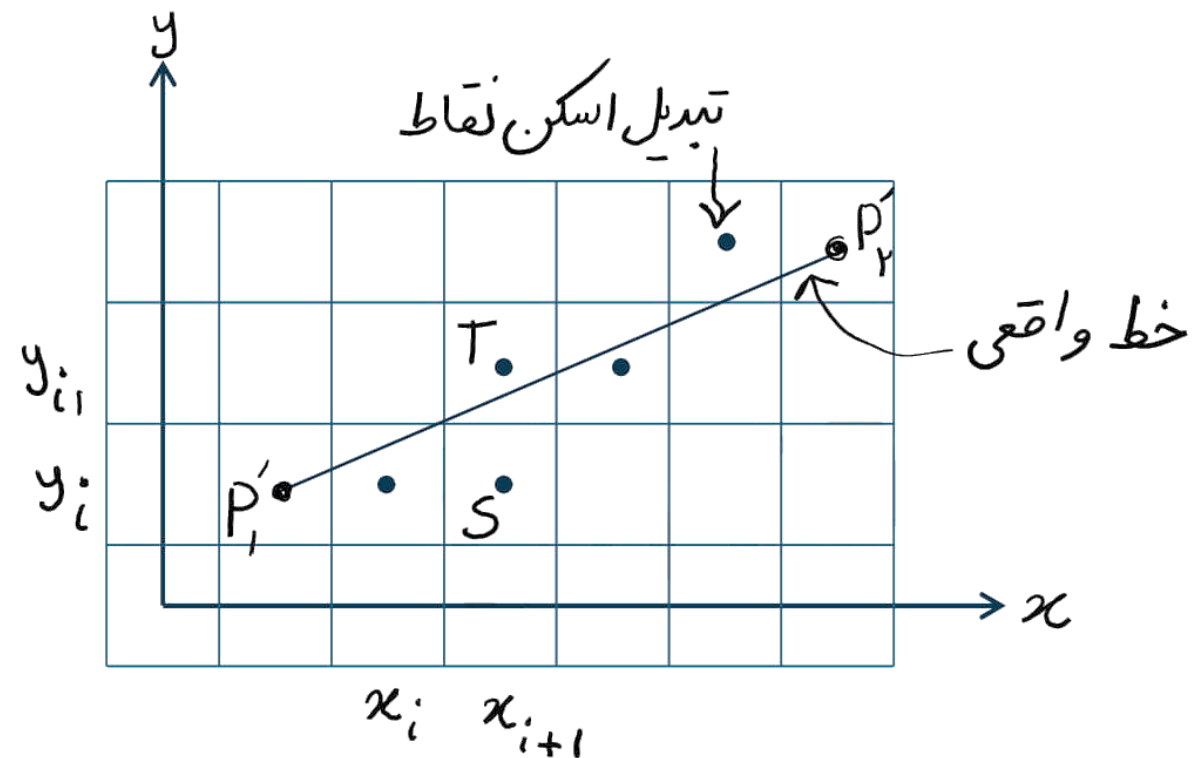
در این روش فرض بر این است که شیب خط بین صفر و یک باشد ($0 < m < 1$).

با پیکسل $P_1'(x_1', y_1')$ شروع کرده و پیکسل‌های بعدی را در جهت افقی به سمت $P_2'(x_2', y_2')$ پیدا می‌کنیم.

بهترین تخمین خط با پیکسل‌هایی است که کمترین فاصله را تا مسیر بین P_1' و P_2' دارند.

تبدیل اسکن پاره خط

فرض می‌کنیم در مرحله‌ی i ام، پیکسل i ام پیکسل $P_i(x_i, y_i)$ باشد،
پیکسل بعدی یعنی (x_{i+1}, y_{i+1})
یکی از دو پیکسل T و S خواهد بود:



تبدیل اسکن پاره خط

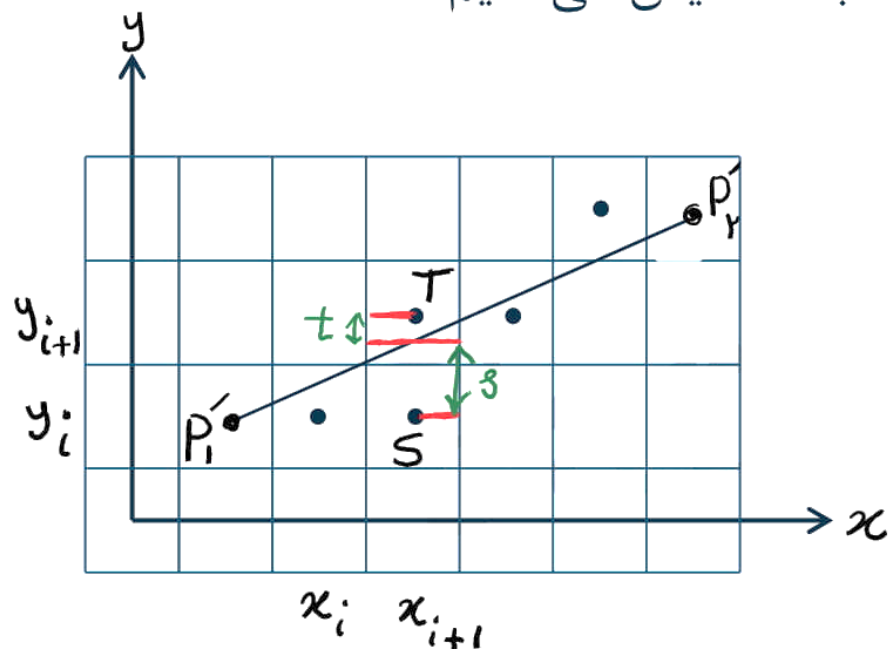
اگر S انتخاب شود: $x_{i+1} = x_i + 1, y_{i+1} = y_i$

اگر T انتخاب شود: $x_{i+1} = x_i + 1, y_{i+1} = y_i + 1$

فاصله S تا خط واقعی در جهت y برابر با $y - y_i$ می باشد که با S نمایش می دهیم

و فاصله T تا خط واقعی در جهت y برابر با $y_i + 1 - y$

می باشد که با t نمایش می دهیم:

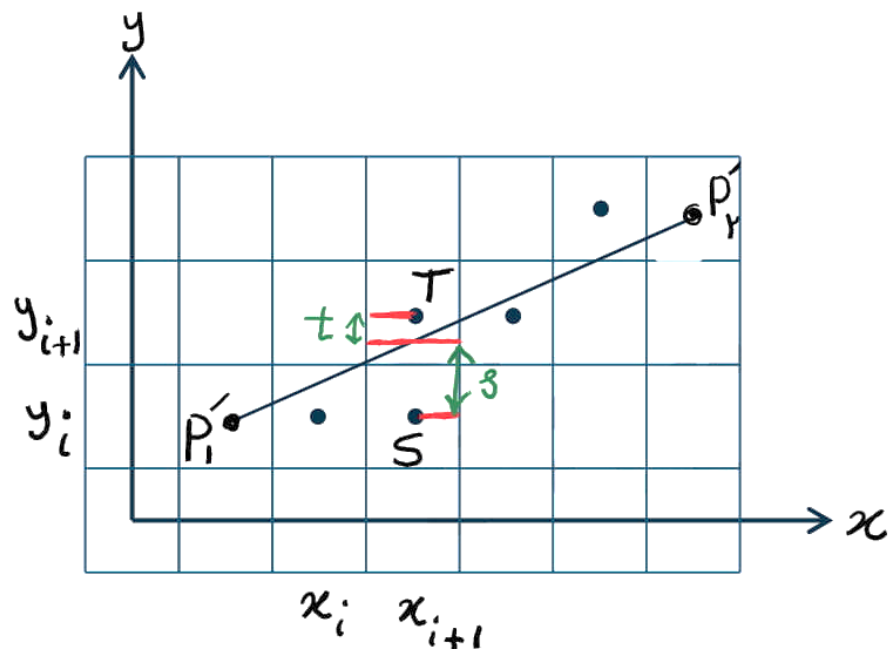


تبدیل اسکن پاره خط

اگر $s - t < 0$ باشد یعنی $s < t$ است و S به خط نزدیک تر است.

اگر $s - t > 0$ باشد یعنی $s > t$ است و T به خط نزدیک تر است.

اگر $s - t = 0$ باشد T انتخاب می شود.



$$\begin{aligned}
 s - t &= (y - y_i) - (y_i + 1 - y) \\
 &= 2y - 2y_i - 1 \\
 &= 2m(x_i + 1) + 2b - 2y_i - 1 \quad (*)
 \end{aligned}$$

تبدیل اسکن پاره خط

حال یک متغیر تصمیم گیری تعریف می کنیم:

$$d_i = \Delta x(s - t)$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} d_i = \Delta x(2m(x_i + 1) + 2b - 2y_i - 1)$$

$$\Rightarrow \dots \xrightarrow{m=\Delta y/\Delta x} d_i = 2\Delta y x_i - 2\Delta x y_i + \underbrace{(2\Delta y + 2b\Delta x - \Delta x)}_{\text{قرار می دهیم } C}$$

$$\Rightarrow d_i = 2\Delta y x_i - 2\Delta x y_i + C, \quad d_{i+1} = 2\Delta y x_{i+1} - 2\Delta x y_{i+1} + C$$

$$d_{i+1} - d_i = 2\Delta y(x_{i+1} - x_i) - 2\Delta x(y_{i+1} - y_i)$$

$$d_{i+1} = d_i + 2\Delta y(x_{i+1} - x_i) - 2\Delta x(y_{i+1} - y_i)$$

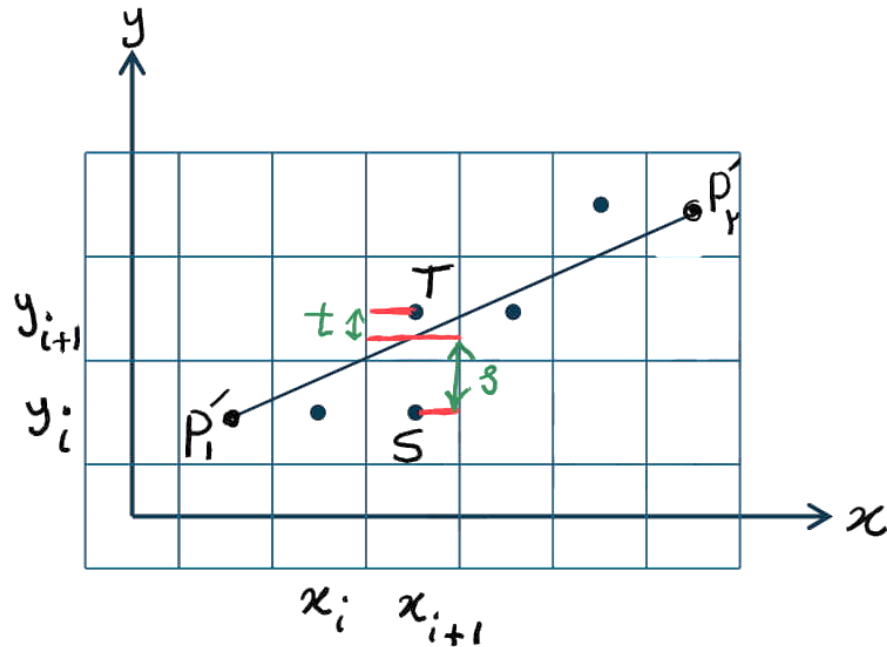
تبدیل اسکن پاره خط

اگر پیکسل انتخاب شده پیکسل T باشد آن گاه $y_{i+1} = y_i + 1$

$$d_{i+1} = d_i + 2(\Delta y - \Delta x) \quad \text{پس:}$$

اگر پیکسل انتخاب شده پیکسل S باشد آن گاه $y_{i+1} = y_i$

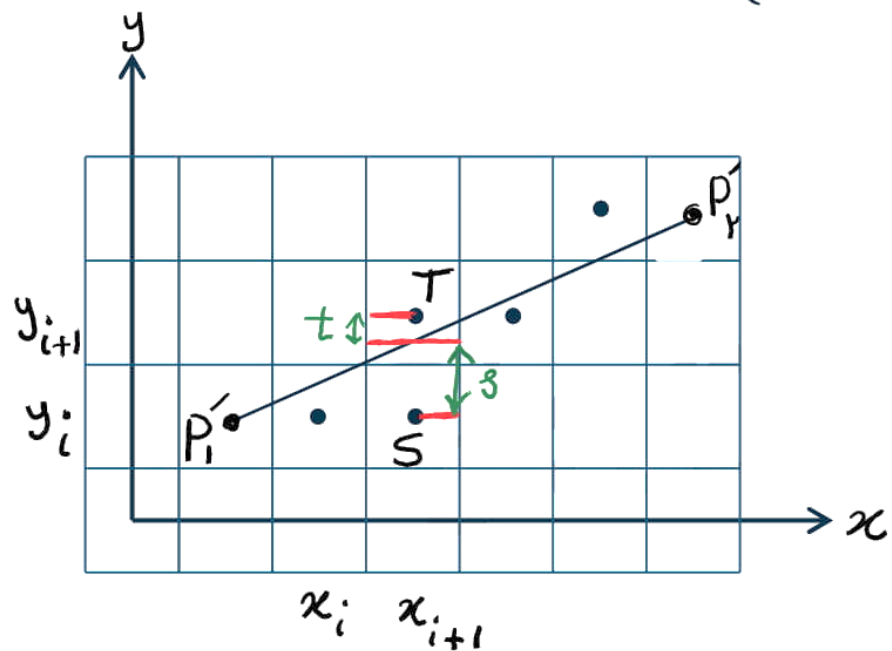
$$d_{i+1} = d_i + 2\Delta y \quad \text{پس:}$$



تبدیل اسکن پاره خط

به طور کلی:

$$d_{i+1} = \begin{cases} d_i + 2(\Delta y - \Delta x), & d_i \geq 0 \\ d_i + 2\Delta y, & d_i < 0 \end{cases}$$



تبدیل اسکن پاره خط

و در پایان d_1 که مقدار پایه برای فرمول فوق است به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\begin{aligned} d_1 &= \Delta x(2m(x_1 + 1) + 2b - 2y_1 - 1) \\ &= \Delta x(2(mx_1 + b - y_1) + 2m - 1) \end{aligned}$$

و زمانی که $mx_1 + b - y_1 = 0$ باشد:

$$d_1 = 2\Delta y - \Delta x$$

تبدیل اسکن پاره خط

مثال: با استفاده از الگوریتم برسنهام پاره خط واصل بین $P_1(1,0)$ و $P_2(6,4)$ را اسکن نمایید.

$$\Delta y = 4, \Delta x = 5 \Rightarrow m = \frac{4}{5} < 1, \quad P_1 = (1,0) \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

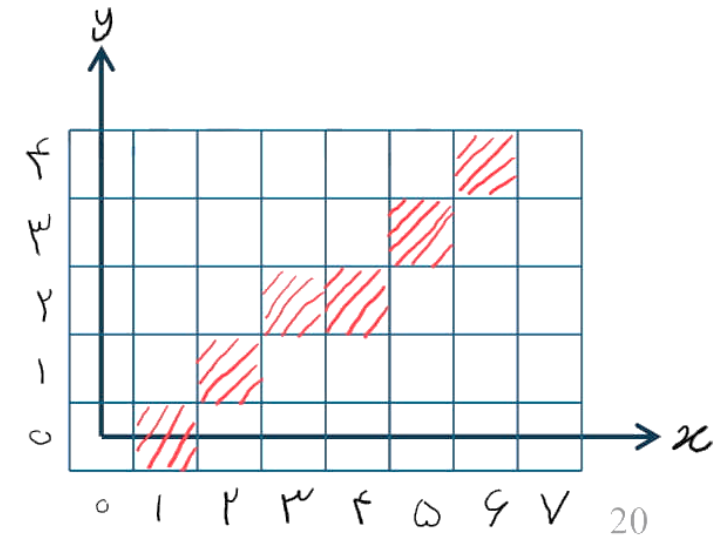
$$d_1 = \Delta x[2(mx_1 + b - y_1) + 2m - 1] = \dots = 3 \geq 0$$

$$d_2 = d_1 + 2(\Delta y - \Delta x) = 3 + 2(4 - 5) = 1 \geq 0 \rightarrow T$$

$$d_3 = d_2 + 2(\Delta y - \Delta x) = 1 + 2(4 - 5) = -1 < 0 \rightarrow S$$

$$d_4 = d_3 + 2\Delta y = -1 + 2(4) = 7 \geq 0 \rightarrow T$$

$$d_5 = d_4 + 2(\Delta y - \Delta x) = 7 + 2(4 - 5) = 5 \geq 0 \rightarrow T$$



تبدیل اسکن پاره خط

تفاوت دو الگوریتم DDA و برسنبهام

در الگوریتم DDA، یک ضرب در عدد ۱ و دو جمع با m و $\frac{1}{m}$ داریم که m با وجود این که ثابت است ولی هر عددی می تواند باشد. مثلاً اگر m یک عدد اعشاری طولانی باشد، با گرد کردن ممکن است خطا پیدا شود. این در حالی است که در الگوریتم برسنبهام فقط یک ضرب در عدد ۲ داریم.

تبدیل اسکن دایره

دایره یک شکل متقارن است و به همین دلیل می توان برای هر مقدار که الگوریتم محاسبه می کند، از تقارن دایره برای رسم هشت نقطه استفاده نمود.

$$P_1=(x,y)$$

$$P_2=(y,x)$$

$$P_3=(-y,x)$$

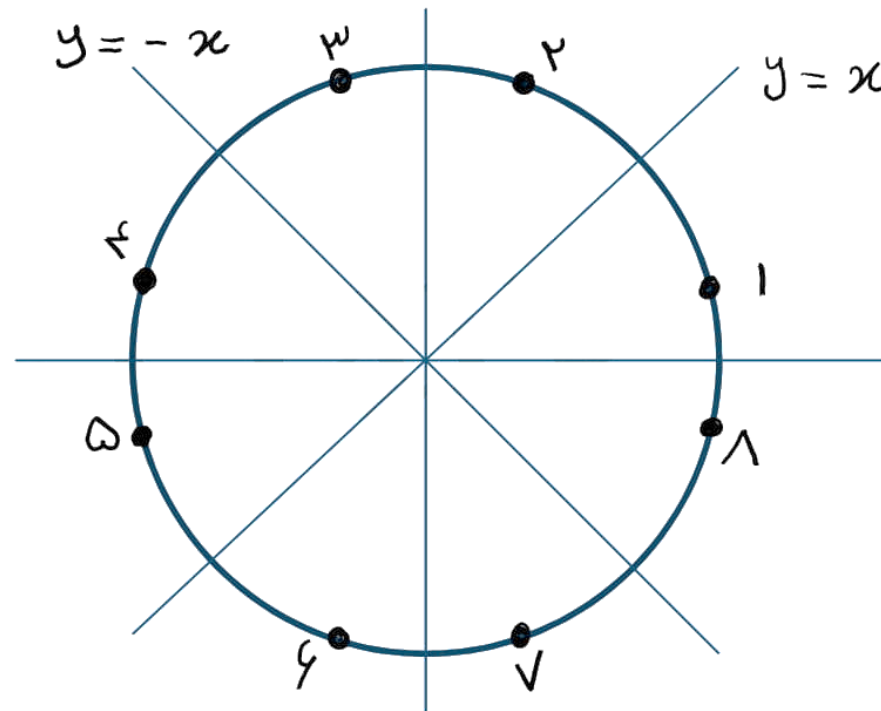
$$P_4=(-x,y)$$

$$P_5=(-x,-y)$$

$$P_6=(-y,-x)$$

$$P_7=(y,-x)$$

$$P_8=(x,-y)$$



تبدیل اسکن دایره

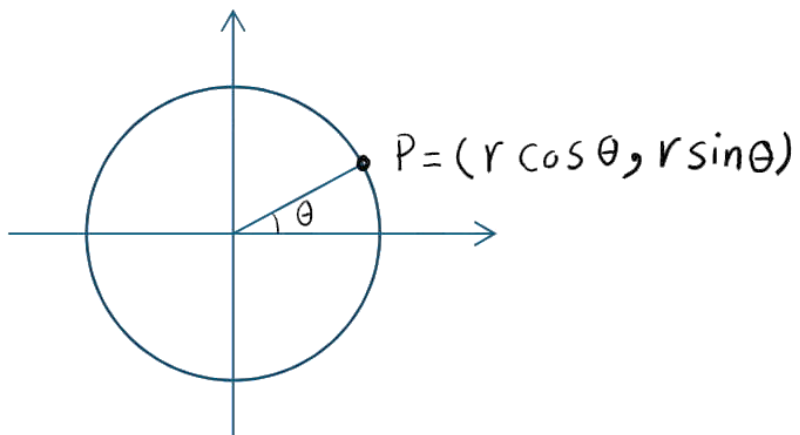
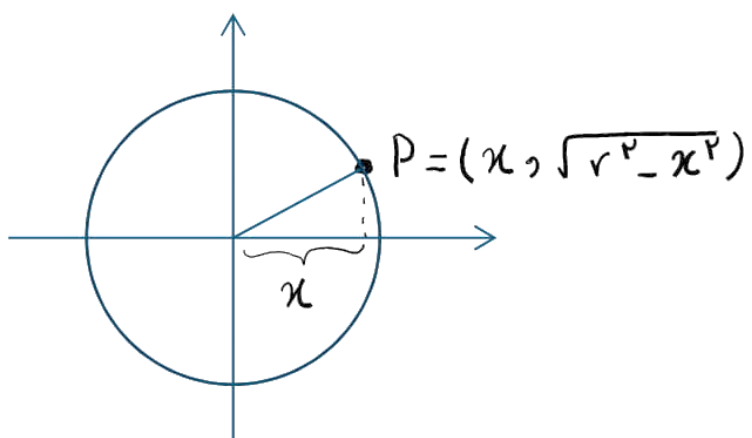
استفاده مستقیم از معادله دایره

۱. تعریف دایره به مرکز مبدأ و شعاع r :

$$y^2 = r^2 - x^2$$

۲. تعریف دایره با استفاده از توابع مثلثاتی:

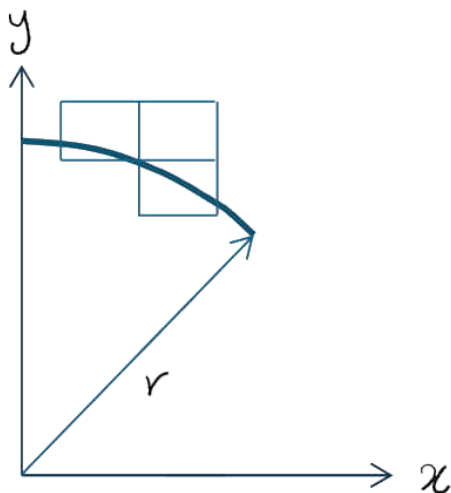
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



تبدیل اسکن دایره

استفاده از الگوریتم برسنهم

در الگوریتم برسنهم، از تقارن ۸ تایی برای تولید دایره استفاده می‌شود و تنها نقاط در بازه‌ی ۴۵ درجه‌ای تولید می‌شوند.

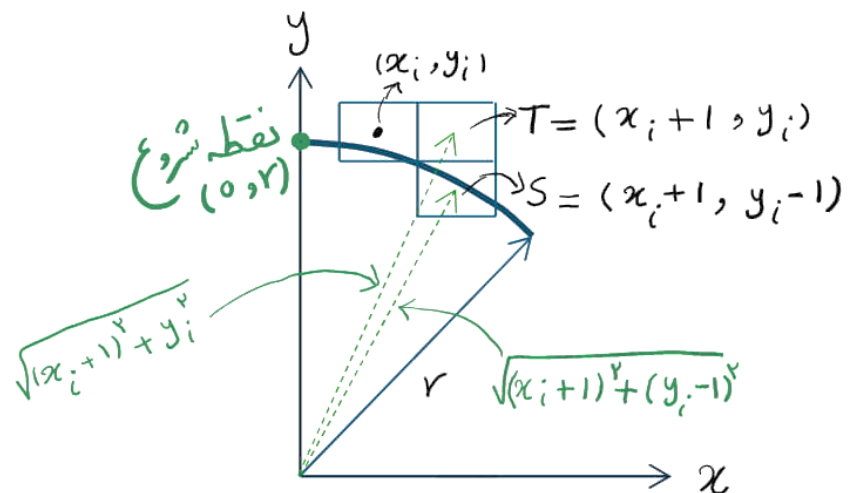


بهترین تخمین دایره با پیکسل‌هایی است
که کمترین فاصله را تا دایره‌ی واقعی داشته باشند.

تبدیل اسکن دایره

فرض کنیم (x_i, y_i) مختصات آخرین پیکسل تبدیل اسکن شده در مرحله i ام باشد.

تعریف می کنیم:



$$D(T) = (x_i + 1)^2 + y_i^2 - r^2 > 0$$

$$D(S) = (x_i + 1)^2 + (y_i - 1)^2 - r^2 < 0$$

تبدیل اسکن دایره

حال متغیر تصمیم‌گیری به صورت زیر تعریف می‌شود:

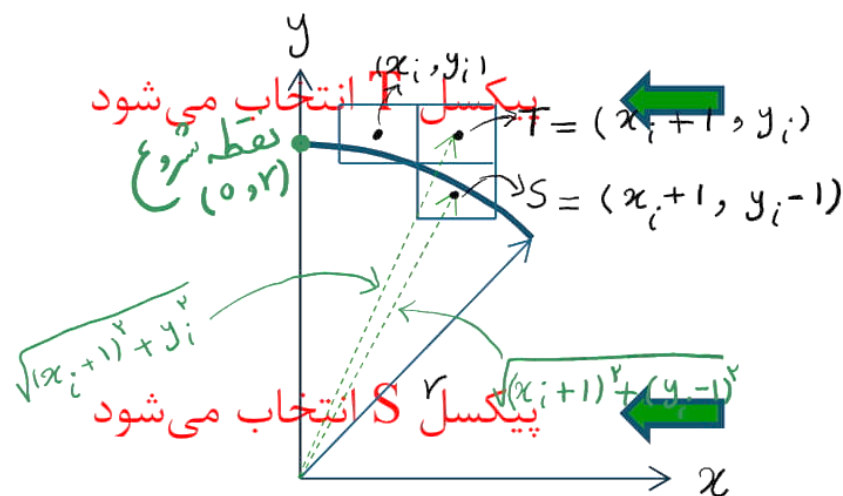
$$\begin{aligned} d_i &= D(T) + D(S) \\ &= 2(x_i + 1)^2 + y_i^2 + (y_i - 1)^2 - 2r^2 \end{aligned}$$

اگر $d_i < 0$ باشد یعنی $D(T) + D(S) < 0$ است.

چون $D(T)$ مثبت و $D(S)$ منفی است پس $|D(T)| < |D(S)|$

اگر $d_i \geq 0$ باشد یعنی $D(T) + D(S) \geq 0$ است،

پس $|D(T)| \geq |D(S)|$



تبدیل اسکن دایره

$$d_{i+1} = 2(x_{i+1} + 1)^2 + y_{i+1}^2 + (y_{i+1} - 1)^2 - 2r^2$$

$$d_{i+1} - d_i = 2(x_{i+1} + 1)^2 + y_{i+1}^2 + (y_{i+1} - 1)^2 - 2(x_i + 1)^2 - y_i^2 - (y_i - 1)^2$$

$$\xrightarrow{x_{i+1}=x_i+1} d_{i+1} = d_i + 4x_i + 2(y_{i+1}^2 - y_i^2) - 2(y_{i+1}^2 - y_i^2)^2 + 6$$

$$d_{i+1} = d_i + 4x_i + 6 \quad \bullet \text{ اگر } T \text{ انتخاب شود:}$$

$$d_{i+1} = d_i + 4(x_i - y_i) + 10 \quad \bullet \text{ اگر } S \text{ انتخاب شود:}$$

تبدیل اسکن دایره

$$\Rightarrow d_{i+1} = \begin{cases} d_i + 4(x_i - y_i) + 10 & d_i \geq 0 \quad (S \text{ انتخاب شود}) \\ d_i + 4x_i + 6 & d_i < 0 \quad (T \text{ انتخاب شود}) \end{cases}$$

و در پایان d_1 را محاسبه می کنیم:

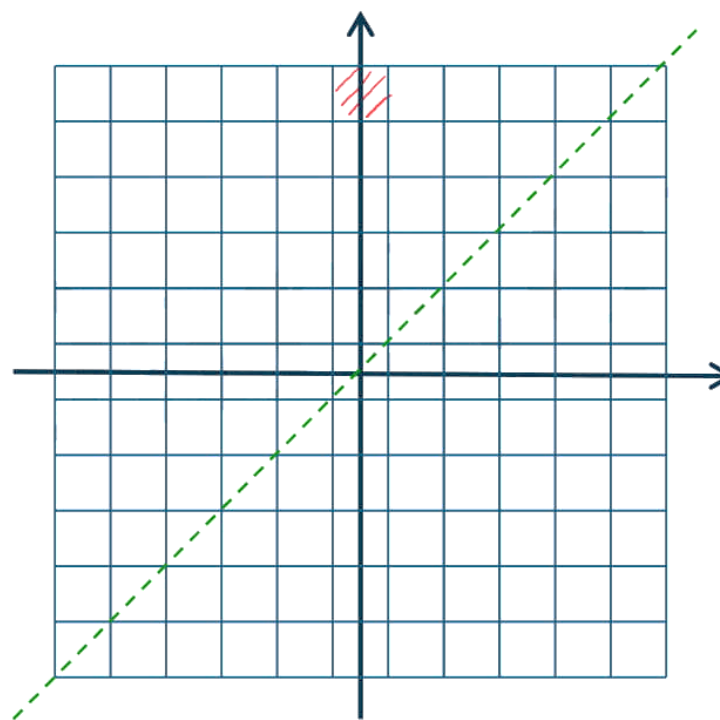
$$d_1 = 2(x_1 + 1)^2 + y_1^2 + (y_1 - 1)^2 - 2r^2$$

$$(x_1, y_1) = (0, r) \Rightarrow d_1 = 3 - 2r$$

تبدیل اسکن دایره

مثال: فرض کنیم که دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۵ قرار است اسکن شود. با استفاده از الگوریتم برسنهام این اسکن را انجام دهید.

$$(x_1, y_1) = (0, 5) \quad \text{و} \quad r = 5$$



تبدیل اسکن دایره

$$d_1 = 3 - 2(5) = -7$$

$$d_2 = d_1 + 4x_1 + 6 = -1 < 0 \rightarrow T$$

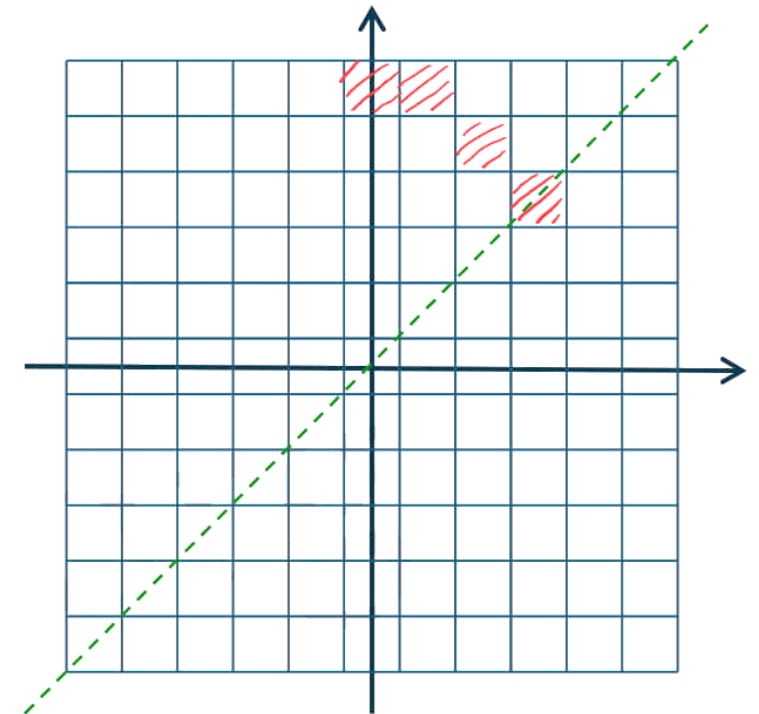
$$x_2 = x_1 + 1 = 1, y_2 = y_1 = 5 \rightarrow (1,5)$$

$$\Rightarrow d_3 = d_2 + 4x_2 + 6 = 9 \geq 0 \rightarrow S$$

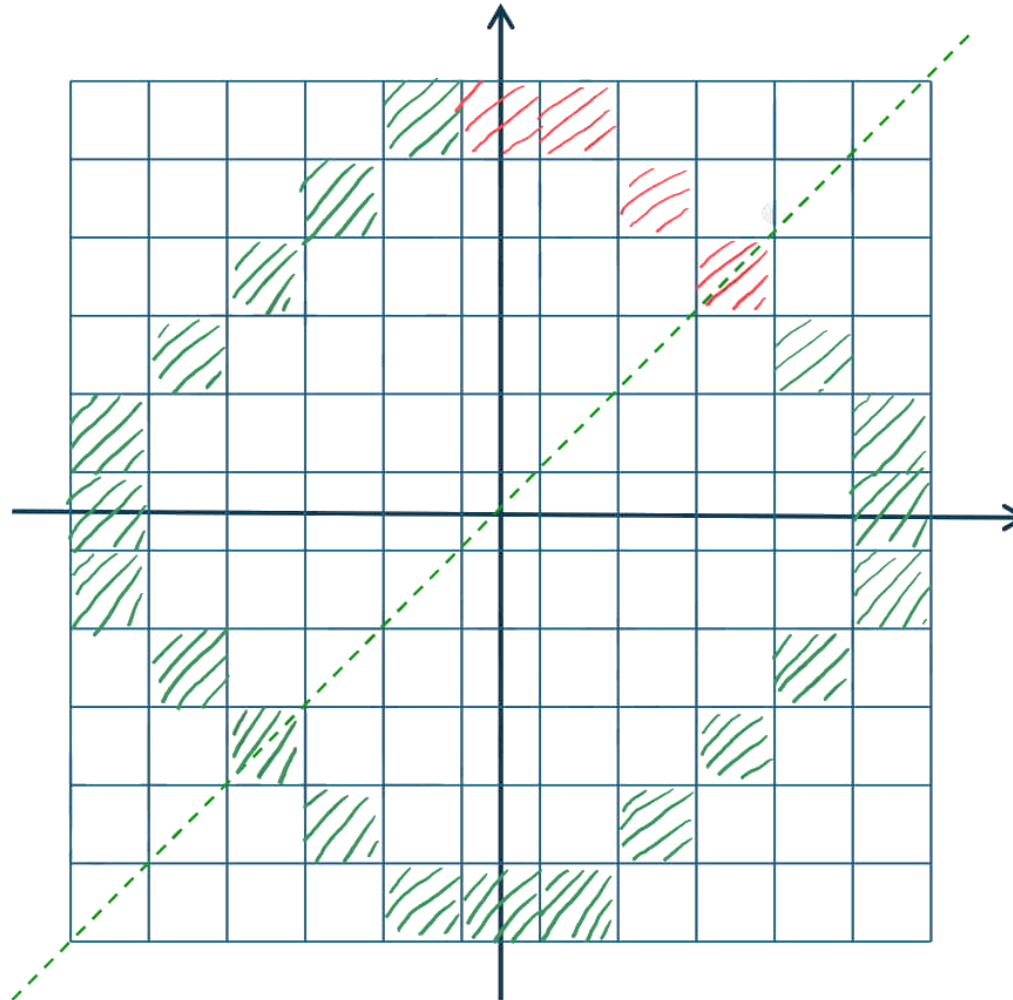
$$x_3 = x_2 + 1 = 2, y_3 = y_2 - 1 = 4 \rightarrow (2,4)$$

$$\Rightarrow d_4 = d_3 + 4(x_3 - y_3) + 10 = 11 \geq 0 \rightarrow S$$

$$x_4 = x_3 + 1 = 3, \quad y_4 = y_3 - 1 = 3$$



تبدیل اسکن دایره



تبدیل اسکن دایره

استفاده از الگوریتم نقطه میانی

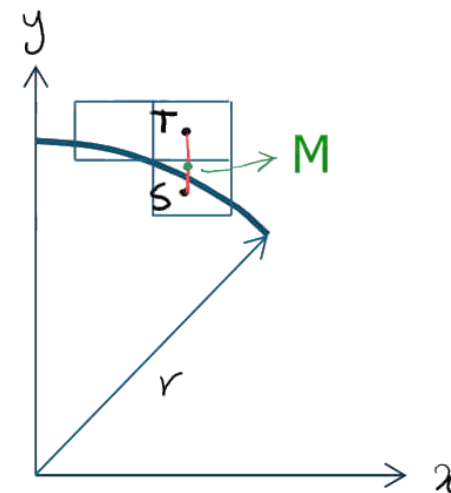
این الگوریتم نیز افزایشی است و بر پایه‌ی تابع زیر برای تست ارتباط مکانی بین یک نقطه‌ی دلخواه (x, y) و یک دایره به شعاع r و مرکز مبدأ است:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 \begin{cases} < 0 \rightarrow \text{داخل دایره } (x, y) \\ = 0 \rightarrow \text{روی دایره } (x, y) \\ > 0 \rightarrow \text{خارج دایره } (x, y) \end{cases}$$

تبدیل اسکن دایره

نقطه‌ی میانی M بین پیکسل S و T دارای مختصات $(x_i + 1, y_i - \frac{1}{2})$ است،
که از آن برای ساختن متغیر تصمیم‌گیری استفاده می‌شود.

$$P_i = f\left(x_i + 1, y_i - \frac{1}{2}\right) = (x_i + 1)^2 + (y_i - \frac{1}{2})^2 - r^2$$



تبدیل اسکن دایره

- اگر $P_i < 0$ باشد نقطه‌ی M داخل دایره است ← پیکسل **T** انتخاب می‌شود
- اگر $P_i \geq 0$ باشد نقطه‌ی M خارج از دایره است ← پیکسل **S** انتخاب می‌شود

تبدیل اسکن دایره

$$P_{i+1} = (x_{i+1} + 1)^2 + (y_{i+1} - \frac{1}{2})^2 - r^2$$

$$\xrightarrow{x_{i+1}=x_i+1} P_{i+1} - P_i = ((x_i + 1) + 1)^2 - (x_i + 1)^2 + (y_{i+1} - \frac{1}{2})^2 - (y_i - \frac{1}{2})^2$$

$$P_{i+1} = P_i + 2(x_i + 1) + 1 + (y_{i+1}^2 - y_i^2) - (y_{i+1} - y_i)$$

• اگر T انتخاب شود: $y_{i+1} = y_i$

• اگر S انتخاب شود: $y_{i+1} = y_i - 1$

تبدیل اسکن دایره

$$\Rightarrow P_{i+1} = \begin{cases} P_i + 2(x_i + 1) + 1, & P_i < 0 \rightarrow T \\ P_i + 2(x_i + 1) + 1 - 2(y_i - 1), & P_i \geq 0 \rightarrow S \end{cases}$$

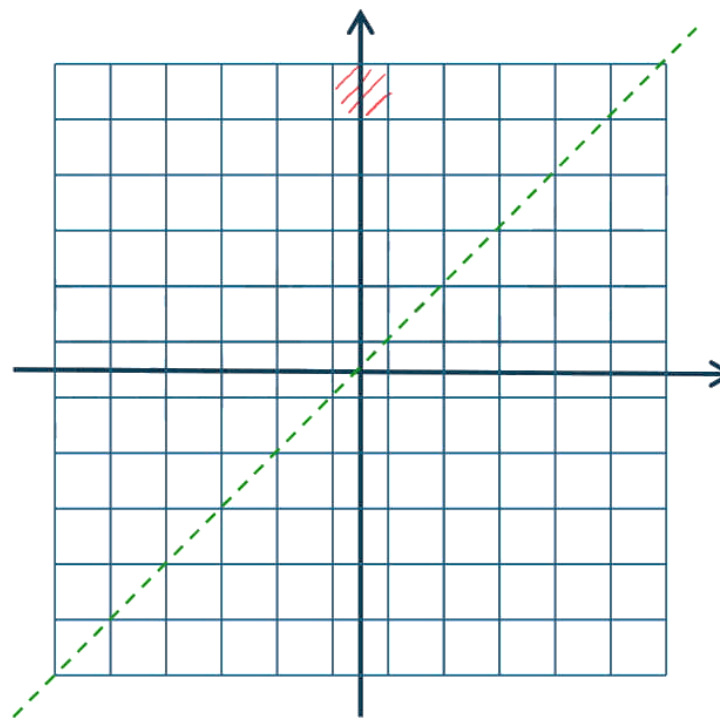
و در پایان P_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$P_1 = (x_1 + 1)^2 + (y_1 - \frac{1}{2})^2 - r^2 = \dots = \frac{5}{4} - r$$

تبدیل اسکن دایره

مثال: فرض کنیم که دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۵ قرار است اسکن شود. با استفاده از الگوریتم نقطه میانی این اسکن را انجام دهید.

$$(x_1, y_1) = (0, 5) \quad \text{و} \quad r = 5$$



تبدیل اسکن دایره

$$P_1 = \frac{5}{4} - r = \frac{5}{4} - 5 = -\frac{15}{4} < 0$$

$$P_2 = P_1 + 2(x_1 + 1) + 1 = -\frac{3}{4} < 0 \rightarrow T$$

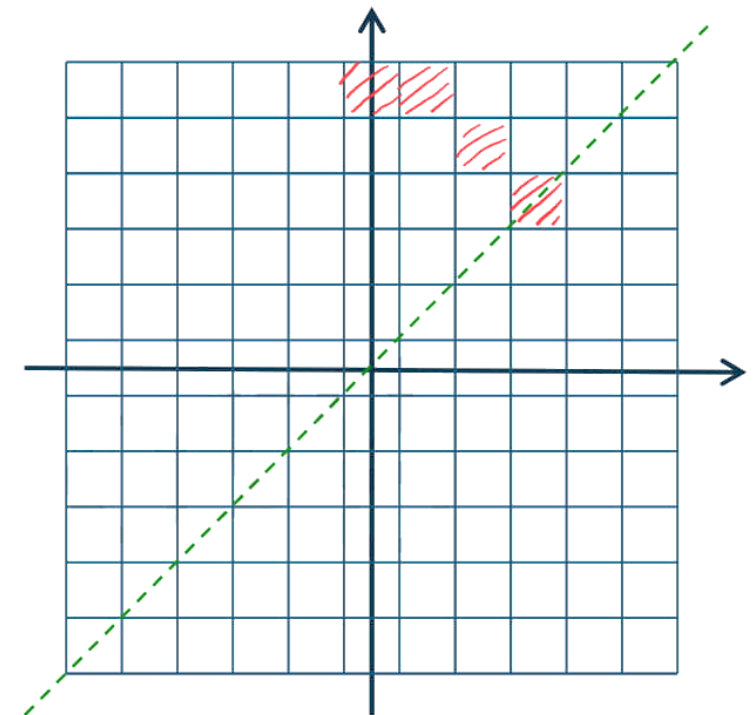
$$\Rightarrow x_2 = 1, \quad y_2 = 5 \rightarrow (1,5)$$

$$P_3 = P_2 + 2(x_2 + 1) + 1 = \frac{17}{4} > 0 \rightarrow S$$

$$\Rightarrow x_3 = x_2 + 1 = 2, \quad y_3 = y_2 - 1 = 4 \rightarrow (2,4)$$

$$P_4 = P_3 + 2(x_3 + 1) + 1 - 2(y_3 - 1) = \frac{21}{4} > 0 \rightarrow S$$

$$\Rightarrow x_4 = x_3 + 1 = 3, \quad y_4 = y_3 - 1 = 3 \rightarrow (3,3)$$



تبدیل اسکن دایره

